

一、图形的对称

在自然界，到处都可见到对称，最多见的是左右对称。例如，人体的外形就左右对称，动、植物界也充满了左右对称（如图 1-1）。

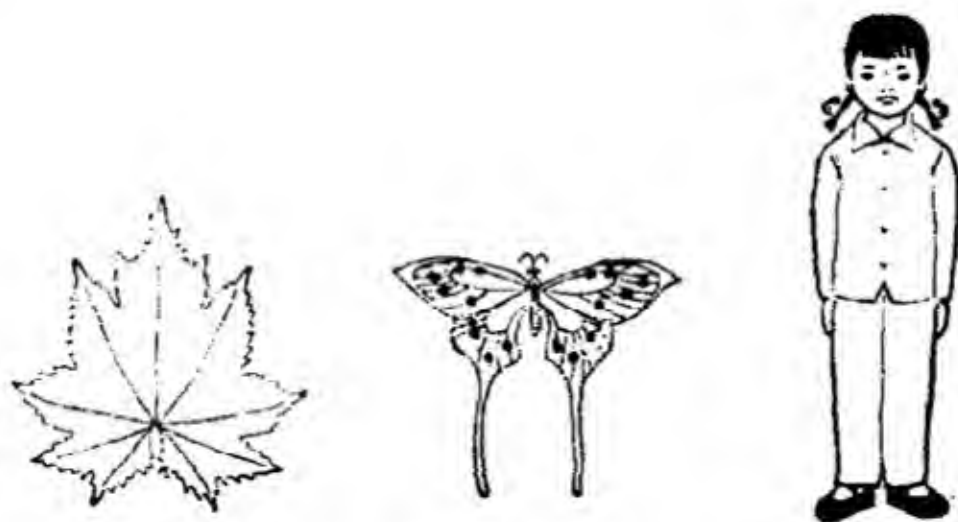


图 1-1

人类在改造自然的过程中，经过成千上万年的实践，逐渐认识到对称的物体美观大方，受力均匀，平衡稳定，并且建造起来也较方便。于是，人们设计、制造了大量的对称形状的

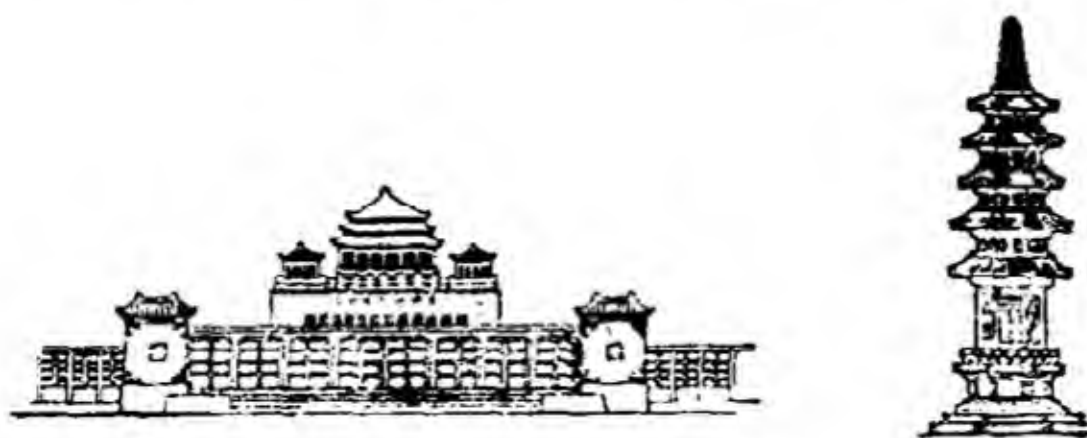


图 1-2

日用器皿、工艺美术品，古建筑和现代大型建筑也大都具有对称性(如图 1-2).

当然，数学中的对称概念，要比上述生活直觉中理解的对称的概念广泛得多，并且，图形的对称性还往往和图形的变换联系着，以下逐一加以讨论.

1. 反射变换和反射对称图形

图 1-3 是一幅花布的图样. 这里，只要告诉你某一角的图案，就可以想象出整个画面. 所以，设计这幅花布图样时，只需画出其四分之一即可(图 1-4).

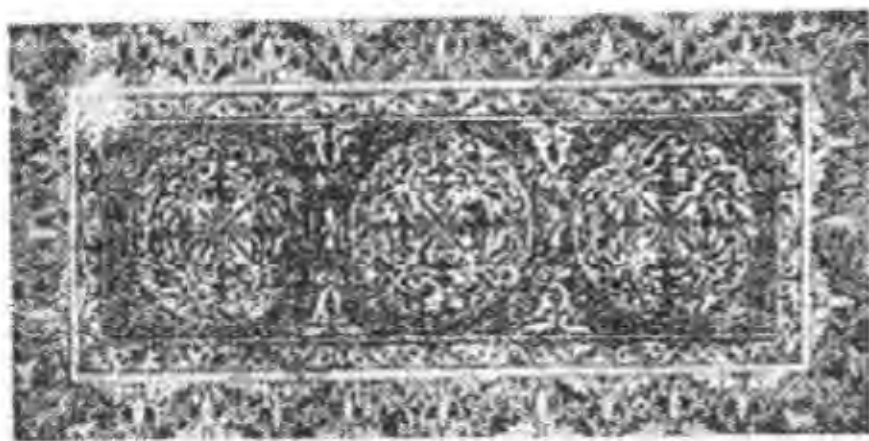


图 1-3



图 1-4

怎样从其右下角的图案来得到右上角的图案呢？具体说来，我们可以先将图 1-4 描在一张透明纸上，再以直线 Ox 为轴，把透明纸绕轴线 Ox 翻转 180° ，便得到了一个新的图形. 运用同样的方法，我们可以从右半图形出发得到左半图形.

里，把一个平面图形绕一直线翻转的结果，是和通常的照镜子相仿的，我们把这种翻转叫做反射变换，确切地说，一个图形 F ，通过一个假想镜面 σ ，使在镜面中得到一个新的图形 F' ，这种从 F 到 F' 的过程叫做关于镜面 σ 的反射变换，记作

$$\sigma: F \rightarrow F'.$$

并且，镜面 σ 叫做反射面(或叫对称面)，图形 F' 叫做图形 F

的象。

这种在镜中的图形 F' ，是可以运用平面镜的成像原理，用几何作图的方法而得出的，如镜面 XY 前有一点 A ，它在镜面中的象 A' 可如下作出：过点 A 作直线 XY 的垂线 AB ，垂足为点 B ；延长 AB 至 A' ，使 $AB=BA'$ ，则点 A' 即为点 A 关于镜面 XY 反射变换下的象(图 1-5)。

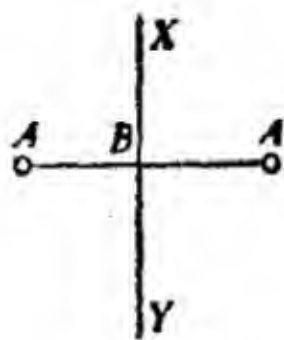


图 1-5

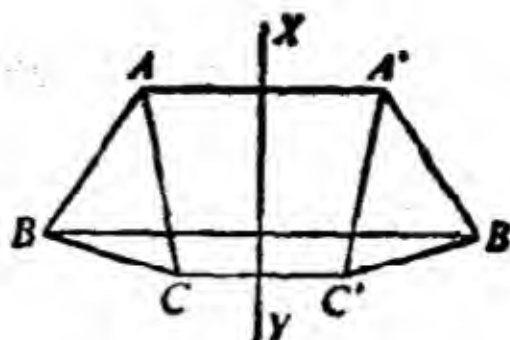


图 1-6

根据同样的道理，如果图形 F 为 $\triangle ABC$ ，那么它关于镜面 XY 反射变换下的象 F' 即为 $\triangle A'B'C'$ (图 1-6)。这里，点 A 与 A' 、点 B 与 B' 、点 C 与 C' 分别是对应点，并且是一一对应的；线段 AB 与 $A'B'$ 、 AC 与 $A'C'$ 、 BC 与 $B'C'$ 分别是对应线段； $\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$ 、 $\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$ 、 $\angle BCA$ 与 $\angle B'C'A'$ 分别是对应角，可以证明：

$$\begin{aligned} AB &= A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A', \\ \angle BAC &= \angle B'A'C', \quad \angle ABC = \angle A'B'C', \\ \angle BCA &= \angle B'C'A', \end{aligned}$$

并且

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C',$$

可见一个图形 F 经过反射变换，能保持对应线段的长度不变，对应角的角度不变，并且，图形 F 和它在反射变换下的象 F' 是全等的图形。当然， F 和 F' 不一定重合。就是说，通过反射变换，一个图形的位置是可能改变的。

对于一个图形 F ，如果存在这样一个镜面 σ ，使 F 在关

于 σ 的反射变换下的象 F' 能和原图形 F 重合, 即变换前后的图形重合, 我们把这样的图形叫做反射对称图形.

显然, 本书一开头所讲到的那些生活直觉中很为多见的“对称”, 都是这里所说的反射对称图形. 反射变换下的对应点、对应线段、对应角相应地叫做这反射对称图形的对称点、对称线段、对称角.

2. 旋转变换和旋转对称图形



图 1-7

图 1-7 是一张雪花结晶图. 如果我们想象在中心处有一根垂直纸面的直线, 那么当将雪花图绕该直线顺时针方向旋转过 60° 度时, 旋转前后的图形就会重合. 同样地, 绕定直线旋转 120° 、 180° 、 240° 、 300° 、 360° 时, 旋转前后的图形也会重合. 以下我们把雪花图那样的图形也作为一种对称图形, 不过与前述反射对称图形不同.

一般地说, 一个图形 F , 绕某一固定直线、按一定方向旋转某个角度 α 后, 形成一个新的图形 F' , 这种从图形 F 转到 F' 的过程, 叫做图形关于一固定直线的旋转变换; 固定直线叫做旋转对称轴(也叫旋转轴), 角 α 称为旋转角; 图形 F' 是 F 关于旋转变换下的象. 记作 $c: F \rightarrow F'$.

图形关于旋转变换的象, 可以通过几何作图方法得到. 现在先来看关于点 A 的象 A' 的作图方法(图 1-8). 令 L 为旋转轴, A 点在平面 π 上, L 和 π 垂直并且交于 O 点(O 为 L 在 π 上的垂足). 连结 AO ; 在平面 π 上, 以 O 为圆心、以 OA 为半径画弧; 在此弧上依逆时针方向截取 $AA' = \alpha$, 得到点 A' ,

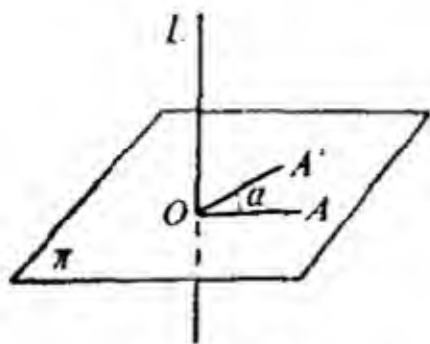


图 1-8

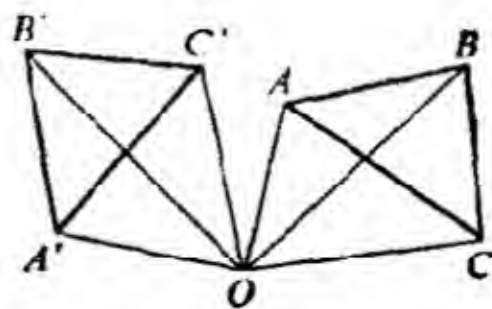


图 1-9

即为点 A 关于旋转轴 L 的旋转变换下的象。

根据同样道理,如果图形 F 为 $\triangle ABC$, 那么它关于旋转轴 L 旋转 α 角度后的象 F' 即是 $\triangle A'B'C'$ (图 1-9). 其中点 A 与 A' , 点 B 与 B' , 点 C 与 C' 分别是对应点, 并且是一一对应的; 线段 AB 与 $A'B'$, BC 与 $B'C'$, CA 与 $C'A'$ 分别是对应线段; 角 $\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$, $\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$, $\angle BCA$ 与 $\angle B'C'A'$ 分别是对应角. 容易证明

$$OA=OA', \quad OB=OB', \quad OC=OC',$$

$$\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC' = \alpha.$$

也就是说, 通过旋转变换, 每双对应点到旋转轴的距离相等; 每双对应点和 O 连线之间的夹角都等于旋转角 α . 由此可以证明: 图形 F 在旋转变换后得到象 F' , F 中任意两点的距离、角度和 F' 中对应点间距离、对应角度相等. 特别地, 有

$$\begin{aligned} AB &= A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A', \\ \angle ABC &= \angle A'B'C', \quad \angle BCA = \angle B'C'A', \\ \angle BAC &= \angle B'A'C', \\ \triangle ABC &\cong \triangle A'B'C'. \end{aligned}$$

可见,

旋转变换和反射变换是一样的, 既保持长度不变, 又保持角度不变, 它们都是保长变换, 又是保角变换. 图形 F 与旋转变换后的象 F' 是全等图形, 但一般情况下, F 和 F' 的位置是不一样的.

一个图形 F ，如果能找到一固定轴，把图形绕该轴旋转适当角度后得到象 F' ，并且 F 和 F' 重合，即旋转变换前后的图形重合，我们就称它为旋转对称图形。旋转变换下的对应点、对应线段、对应角度分别叫做这一旋转对称图形的对称点、对称线段、对称角度。

花冠、蜂巢、正齿轮等等都是旋转对称图形的实例。

在旋转过程中，图形旋转一周，可能重合的次数 n ，称为这一图形的旋转对称次数，并且也称为该旋转轴的次数，即可称该轴为 n 次旋转轴。例如：正方形，它的旋转对称轴是过对角线的交点，并且垂直正方形所在平面的直线。显然，当正方形绕该轴旋转一周时，图形能重合 4 次，所以它为 4 次旋转对称图形，该旋转轴为 4 次旋转轴。再来看圆形，垂直圆心的直线是旋转轴，当绕此轴旋转一周时，能与本身重合无数次，因此我们说圆形具有无限次旋转轴，圆形是无限次旋转对称图形。另外，海星、水母、苹果花等具有 5 次旋转轴，是 5 次对称图形。桔子、橙子、柿子、柠檬等的横截面分别可以是 7 次、8 次、9 次、10 次旋转对称图形等。

3. 反演变换和反演对称图形

照相机摄象时，物与象的关系如图 1-10。

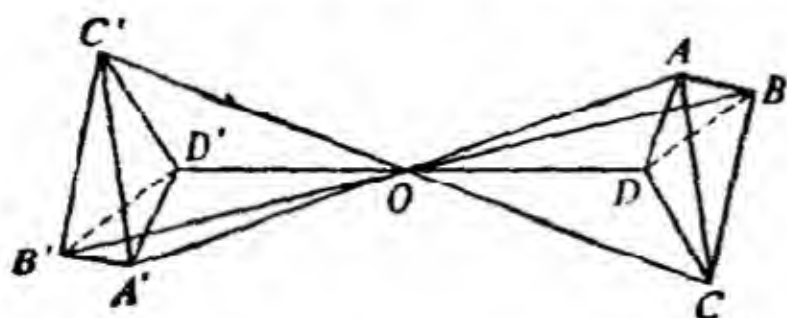


图 1-10

把一个图形 F 上的点和定点 O 联结，并作反方向相等延长，从而得到 F' ，这种从 F 到 F' 的过程，叫做图形 F 关于 O

点的反演变换,定点 O 叫做反演中心,记作 i . $F \rightarrow F'$

反演变换也可以用几何方法表示,图形 F 的象 F' 可以用作图方法得到,我们先来作一点 A ,经过以 O 为反演中心的反演变换后的象 A' ,方法如下:连结点 A 和点 O ,并延长至点 A' ,使得 $OA=OA'$,此时,点 A' 就是点 A 在反演变换下的象(图 1-11).

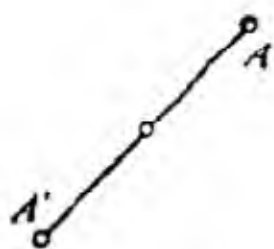


图 1-11

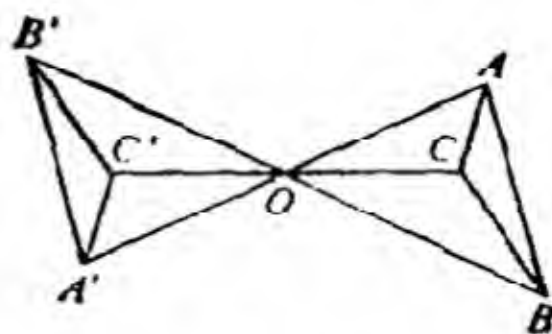


图 1-12

根据同样的道理,如果图形 F 为 $\triangle ABC$,那么它关于 O 点的反演变换下的象 F' 为 $\triangle A'B'C'$ (图 1-12). 点 A 与 A' , B 与 B' , C 与 C' 是反演变换下的对应点,并且是一一对应的;线段 AB 和 $A'B'$, BC 和 $B'C'$, CA 和 $C'A'$ 是对应线段;角 $\angle ABC$ 和 $\angle A'B'C'$, $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$, $\angle ACB$ 和 $\angle A'C'B'$ 是对应角. 由于对应点到反演中心的距离是相等的,即

$$OA=OA', \quad OB=OB', \quad OC=OC',$$

并且

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle A'OB', \quad \angle BOC = \angle B'OC', \\ \angle COA &= \angle C'OA', \end{aligned}$$

所以,可以证明:对应线段、对应角也相等,即有

$$\begin{aligned} AB &= A'B', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C', \\ \angle BAC &= \angle B'A'C', \quad \angle ACB = \angle A'C'B', \\ \angle CBA &= \angle C'B'A', \end{aligned}$$

并且 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'O'$.

可见反演变换也是保长变换、保角变换. 反演变换前后的图形也是全等图形. 当然, 一般情况下, 变换前后的图形位置是变化的.

一个图形 F , 如果能找到一定点 O , 使得 F 在以 O 为反演中心的反演变换后的象 F' 与 F 重合, 即变换前后的图形重合, 我们就把这个图形叫做反演对称图形. 例如: 正方形、菱形、圆、正六面体等都是反演对称图形. 但是锥体和台体就不是反演对称图形.

4. 平移变换和平移对称图形

图 1-13 是二方连图案. 它的特点是, 整个图形可以看作由截出的某个图形单位, 不断向二方连续扩展而成. 二方连可以看作由单位图形按水平方向连续平行移动而得的图形.



图 1-13

一个图形 F , 按某向量 \mathbf{a} 移动后, 得到图形 F' , 这个过程称为关于向量 \mathbf{a} 的平移变换. 记作

$$T, F \rightarrow F',$$

\mathbf{a} 称为平移向量. 一个平移变换完全由平移向量决定.

平移变换也可通过几何作图实施. 我们先来作出一点 A 经过平移变换后的象 A' , 方法如下: 过点 A 作向量 \mathbf{a} , 使得 A 点为向量的起点, 这时向量的终点 A' 就是所求点 A 经过

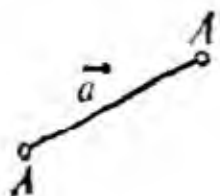


图 1-14

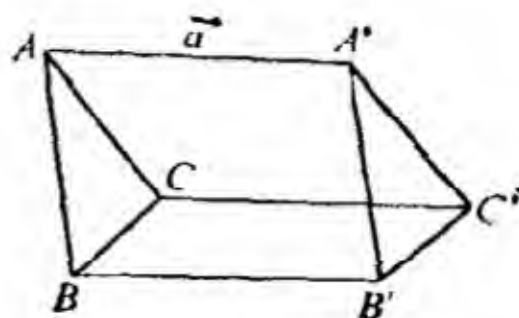


图 1-15

关于 \mathbf{a} 的平移变换后的象(图 1-14).

同理, 如果图形 F 为 $\triangle ABC$, 那么它关于 \mathbf{a} 的平移变换后的象 F' 为 $\triangle A'B'C'$ (图 1-15), 其中点 A 与 A' 、 B 与 B' 、 C 与 C' 分别是对应点, 并且是一一对应的; 线段 AB 与 $A'B'$ 、 BC 与 $B'C'$ 、 CA 与 $C'A'$ 分别是对应线段; 角 $\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$ 、 $\angle ACB$ 与 $\angle A'C'B'$ 、 $\angle CBA$ 与 $\angle C'B'A'$ 分别是对应角. 可以证明: 对应线段和对应角度是相等的, 即有

$$\begin{aligned} AB &= A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A', \\ \angle ABC &= \angle A'B'C', \quad \angle BCA = \angle B'C'A', \\ \angle CAB &= \angle C'A'B', \end{aligned}$$

可见平移变换也是保长变换和保角变换.

一个图形 F , 如果能找到一个向量 \mathbf{a} , 使得经过关于 \mathbf{a} 的平移变换后的图形 F' 与 F 重合, 即变换前后的图形重合, 我们就称该图形为平移对称图形.

上述二方连图就是平移对称图形. 但是三角形、四边形、正多面体等有界限的图形都不能是平移对称图形. 平移对称图形一定是无界限的图形.

平移变换和反射、旋转、反演变换有相同之处, 就是它们都是保长变换, 又是保角变换, 变换前后的图形都是全等图形. 但是平移对称图形还有自己的特点, 它必须是无界图形, 而反射、旋转、反演对称图形却可以有界图形.

以上所述反射、旋转、反演、平移变换,可以统称为对称变换。一个图形经过对称变换能保持不变,即完成这种变换前后的图形重合,这种图形叫做对称图形。关于图形对称变换的性质,以及对称变换的多少的研究,称为对称性研究。这是一个重要的问题,以后将不断加以说明。

5. 解 例

在初等几何中,对图形上的某些元素进行对称变换,然后借各元素新旧位置关系,可以解决某些作图问题和几何极值问题,这种方法叫做对称变换法。由于所用对称变换的差别,它们可分为反射法、旋转法、中心对称法、平移法等。有时,解某个几何问题时,需要同时使用几种不同的对称变换,此时就称之为混合法。

反射法:此法所用的对称变换为反射变换。使用时,首先要注意寻出反射面,在平面图形时就是寻出反射轴,然后再注意寻找反射对称点。

[例 1] A 、 B 为位于直线 l 同侧之两定点,试在定直线 l 上求一点 P ,使得 $PA + PB$ 为最小。(图 1-16)

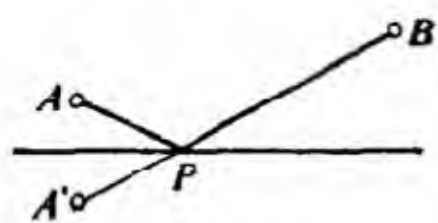


图 1-16

分析 假设 P 点已作出,这时很难发现点 P 的位置有什么特征,如果将点 A 以 l 为反射轴,作反射变换得对称点 A' 。由于 $AP = A'P$,故欲使 $PA + PB$ 最小,只须 $PA' + PB$ 为最小即可。由此可知 P 、 A' 、 B 三点应该共线。

作法 1. 以 l 为反射轴,作 A 点的对称点 A'

2. 连结 BA' , 与 l 交于 P 点 P 点就是所要求的点。

证明 因为点 A 、 A' 关于 l 对称, 所以

$$PA = PA'$$

于是, $PA + PB = PA' + PB$. (等量代换)

因为 P 、 A' 、 B 三点共线, 故在以 A' 、 B 为端点的折线中以 $PA' + PB$ 为最小, 这也就证得了 $PA + PB$ 最小.

[例 2] 过两定点 A 、 B , 作切于定直线 l 的圆. (图 1-17)

分析 假设图已作出, P 点是线段 AB 与 l 的交点, 圆 ABT 过 A 、 B 点并与直线 l 相切于 T 点. 可以看出, 此作图题的关键是确定 T 点的位置, 但此时 T 点没有显示什么特点. 如果作 A 点关于 l 的反射对称点 A' , 我们就能看到:

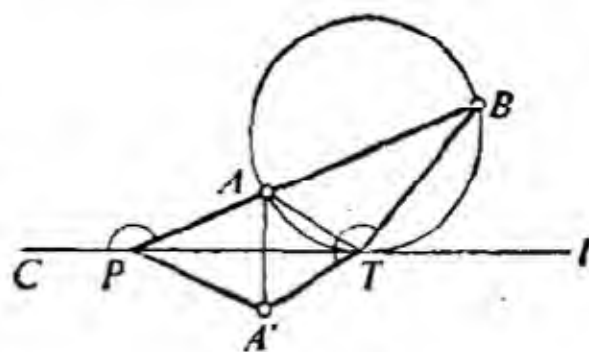


图 1-17

$$\angle ATP = \angle A'TP - \angle ABT,$$

$$\angle CPA = \angle ABT + \angle PTB$$

$$= \angle A'TP + \angle PTB = \angle A'TB.$$

因此, 问题就转化为求作过 A' 、 B 、 T 这三点的圆, 并使 $A'B$ 所含圆周角 $\angle A'TB$ 为定角 $\angle CPA$, 这是可以解决的.

作法 1. 以 l 为轴, 作 A 的反射对称点 A' .

2. 以 $A'B$ 为弦, 作含 $\angle CPB$ 之弧, 此弧与定直线 l 交于点 T .

3. 作过 A 、 B 、 T 三点之圆, 即为所求

证明 因为圆过 A 、 B 、 T 三点, 所以由作图知

$$\angle CPA = \angle A'TB = \angle PTB + \angle A'TP.$$

因为 $\angle CPA$ 是 $\triangle PBT$ 的外角, 所以

$$\angle CPA = \angle PTB + \angle PBT,$$

综上两式,即得

$$\angle PBT = \angle A'TP.$$

于是 $\angle PBT = \angle PTA$, 这就证得了圆与 l 相切于 T .

讨论 因为以 $A'B$ 为弦,作含 $\angle CPB$ 之弧,在一般情况下与定直线 l 可以相交两点,所以在一般情况下,本问题可有两解.

旋转法: 按此法作图所用的对称变换为旋转变换, 这里首先要注意的是寻得适当的旋转轴, 在平面图形时, 就是要寻找旋转中心, 否则将无从施展本法. 当旋转中心确定后,再设法确定旋转角的大小和方向.

[例 3] 求作一正三角形, 使它的三个顶点 A 、 B 、 C , 分

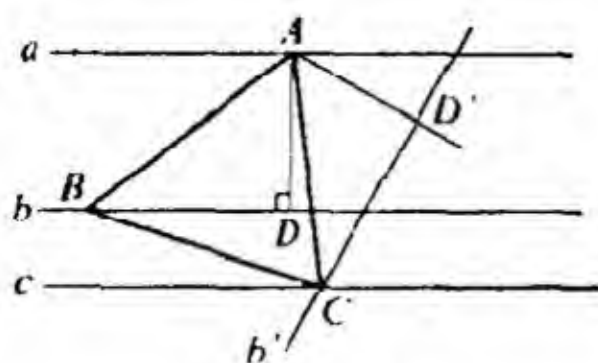


图 1-18

别落在三条已知平行直线 a 、 b 、 c 之上, (图 1-18)

分析 假设正三角形已经做出,显然其中必有一顶点,例如 A 可以在 a 上任意选取,此后关键是要确定 C 点(或 B 点)

的位置,但此时 C 点没有直接显示什么特点,故我们就想到,如果以 A 点为中心,把正三角形 $\triangle ABC$ 绕 A 点旋转 60° 时,此时 B 点将转到 C 点的位置,同时直线 b 转到 b' 的位置,而 C 点恰为 b' 和 c 的交点,因此当 b' 确定时, C 点也就确定. 确定 b' 的位置是可以做到的,例如,如果我们作 AD 垂直 b ,和 b 交于 D 点,则 D 点通过 60° 旋转后将处在 D' 的位置,即 $\angle D'AD = 60^\circ$, $AD' = AD$,作过 D' 点且与 AD' 垂直的直线就是 b' . 此时 C 点就容易确定了,它是直线 c 和直线 b' 的交点. 进而,由 A 、 C 就可确定 B 点.

作法 1. 在直线 a 上任选一点 A , 作 $AD \perp b$, 且与直线 b 交于 D 点.

2. 作 AD 旋转 60° 后的象 AD' (即 $\angle D'AD = 60^\circ$, 且 $AD' = AD$).

3. 过 D' 作与 AD' 垂直的直线 b' , 它与 a 交于 C 点, 连结 AC

4. 作 AB , 使 $\angle BAC = 60^\circ$, 与 b 交于 B 点, 连结 BC 此时 $\triangle ABC$ 即为所求.

证明 由作法, 有

$$\angle DAD' = \angle BAC = 60^\circ.$$

这两个角中同减去 $\angle DAC$, 即有

$$\angle D'AC = \angle DAB, \quad (\text{等量公理})$$

$$\text{rt}\triangle AD'C \cong \text{rt}\triangle ADB.$$

$$AB = AC.$$

这就证得了 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 又因其顶角 $\angle BAC = 60^\circ$, 所以它是正三角形.

讨论 本题是不定位作图, 它有解, 而且适合条件的图形彼此是全等的, 所以为一解. 第十四届国际中学生数学竞赛, 由英国命题的第 6 题: “给出四个不重合的互相平行的平面, 试证: 存在一个正四面体, 它的四个顶点, 分别在这四个平面上.” 它是例 3 的推广, 即由平面问题向空间问题的推广.

中心对称法: 它利用反演变换作图. 利用中心对称法解题时, 要注意奇数个反演的合成仍是反演, 而偶数个反演的合成却是一个平移, 甚至也可以是恒等变换.

[例 4] 已知各边中点的位置, 求作五边形. (图 1-19)

假设 五点为 L, M, N, O, P .

求作 五边形 $ABCDE$, 使 L, M, N, O, P 依次分别

是 AB 、 BC 、 CD 、 DE 、 EA 五条边的中点。

分析 1. 要求 L 、 M 、 N 、 O 、 P 依次是未知五边形

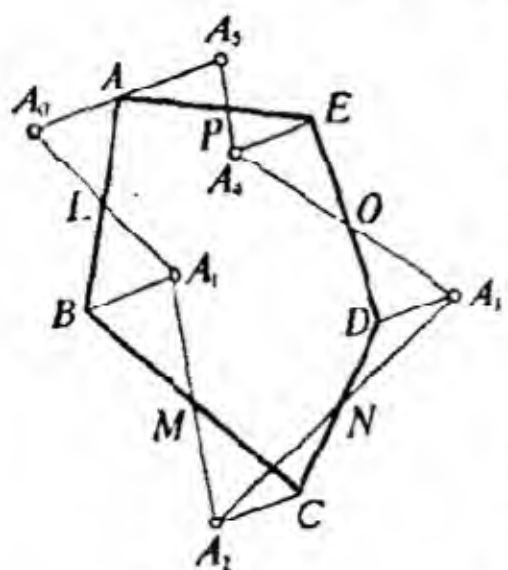


图 1-19

$ABCDE$ 的边 AB 、 BC 、 CD 、 DE 、 EA 的中点，相当于求一点 A ，接连以 L 、 M 、 N 、 O 、 P 作反演中心、施行五次反演变换后，使 A 仍然变回自身。

2. 我们知道五个反演的合成还是一个反演，而在反演变换下，只有反演中心是不变点，故 A 点必定是这个反演变换的反演中心。于是问题就

转化成怎样去求这个反演中心的问题。

3. 寻求一个反演中心，只需求得任意一双对应点即可。因此，可以随便取一点 A_0 ，对它接连施行上述五个反演变换，结果将 A_0 变为 A_5 ；此时连结 A_0A_5 ，取其中点，就是我们所要求的反演中心，它也就是 A 点。 A 点既已作出，其它顶点 B 、 C 、 D 、 E 便可顺次作出。

作法 1. 任意取一点 A_0 ，作折线 $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ ，使 L 、 M 、 N 、 O 、 P 依次是 A_0A_1 、 A_1A_2 、 A_2A_3 、 A_3A_4 、 A_4A_5 的中点。

2. 取 A_0A_5 的中点为 A ，作折线 $ABCDE$ ，依次使 L 、 M 、 N 、 O 、 P 依次是 AB 、 BC 、 CD 、 DE 的中点。

3. 连结 EA 五边形 $ABCDE$ 即为所求作的五边形。

证明 按作图知， L 、 M 、 N 、 O 已经依次是 AB 、 BC 、 CD 、 DE 的中点，故现在只需证 P 点是 EA 的中点即可。

$$A_0A \parallel A_1B \parallel A_2C \parallel A_3D \parallel A_4E$$

（反演变换的对应线段反向平行或共线），而 A_0A 和 AA_5 共线，即也有 $AA_5 \parallel A_4E$ ，又因

$$A_0A = A_1B = A_2C = A_3D = A_4E$$

(对应线段), 而 A 为 A_0A_5 的中点, 即又有 $AA_5 = A_0A$, 所以

$$AA_5 = A_4E.$$

从而, 四边形 AA_4EA_5 是平行四边形, 所以

$$\triangle AA_5P \cong \triangle A_4EP.$$

$$AP = EP,$$

即 P 为 AE 的中点.

平移法: 此法所用的对称变换是平移.

[例 5] 在 $\triangle ABC$ 中, 作一条具有给定方向的线段, 使其端点 X, Y 分别在两边 AB, AC 上, 且使 $BX = CY$. (图 1-20)

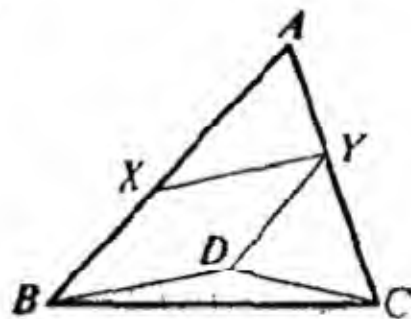


图 1-20

分析 若图已作出, XY 为一给定的方向, $BX = CY$. 当 Y 点(或 X 点)确定时, 问题就解决了. 但由于 Y 点此时没有显示什么特点, 为此我们想, 如果将 XY 平移至 BD , 那么连结 DY , 显然有 $BX \parallel DY$. 加之 $BX = DY$, 所以 $DY = CY$. 此时 $\triangle DCY$ 为等腰三角形, 且 $\angle DYC = \angle A$. 连结 DC , 通过计算知道

$$\angle DCY = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A.$$

由此可见, D 点是具有给定的方向的线段 BD 和由 $\angle DCY = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$ 确定的直线 CD 的交点.

作法 1. 在 B 点作确定方向的射线 BD .

2. 过 C 点作 CD , 使得 $\angle DCA = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$. 得 CD

与 BD 的交点 D .

3. 过点 D 作 $DY \parallel AB$, 且与 AC 交于 Y .

4. 过 Y 作 $XY \parallel BD$, 与 AB 交于 X , 此时, XY 就为所求的线段.

证明 由 BD 的作法, 直接知道 XY 具有给定的方向, 以下只需证明 $BX = CY$.

$$\begin{aligned}\because \angle YDC &= 180^\circ - \angle A - \angle DCY \\ &= 180^\circ - \angle A - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle A\right) \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = \angle DCY, \quad (\text{作法})\end{aligned}$$

所以 $\triangle DYC$ 为等腰三角形, 即有

$$DY = CY.$$

由作法, $DA \parallel BX$ 且 $BD \parallel XY$, 故四边形 $BDYX$ 为平行四边形, 从而

$$BX = DY.$$

这就证明了

$$BX = CY.$$

混合法: 作图时利用了多种对称变换.

[例 6] 在一灌溉总渠两岸有两个村庄, 今需要在渠上架一垂直桥梁 (设渠道两岸平行), 并且使两个村庄到桥头的距离相等, 问此桥应架在何处? (图 1-21)

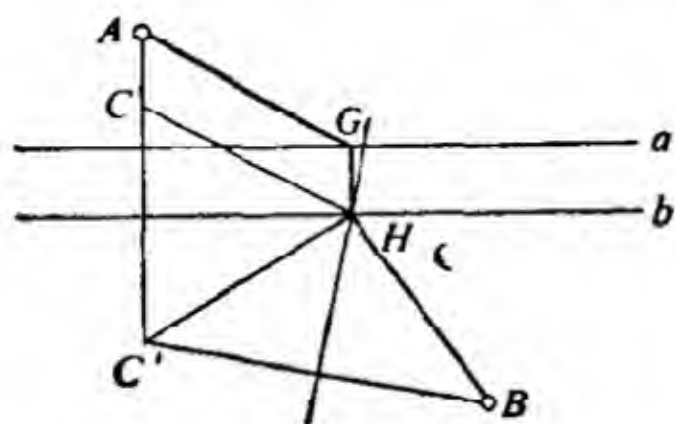


图 1-21

架一垂直桥梁 (设渠道两岸平行), 并且使两个村庄到桥头的距离相等, 问此桥应架在何处? (图 1-21)

假设 平行线 a b 为渠道两岸, A 、 B 为两村庄所在处.

求作 HG , 使 $HG \perp a$ b , 且使 $AG = HB$.

分析 若图已作出,可以见到,关键是确定 H 点(或 G 点)的位置,但此时 H 点没有显示什么特点,如果我们过 A 作 a 的垂线,并在这垂线上截取 O 点,使 AO 等于渠道宽,这时,问题就转化为在直线 b 上找一 H ,使得 H 到 B 、 C 点距离相等,如果再作 C 关于 b 的反射对称点 C' ,必有 $O'H=HB$ 可见 H 必在线段 $O'B$ 的垂直平分线上.

作图 1. 过 A 点作 a 的垂线,并在这垂线上截取

$$AO = \text{渠道宽}.$$

2. 作 O 关于直线 b 的反射对称点 O' .

3. 连结 BO' , 作 BO' 的垂直平分线, 与直线 b 交于 H .

4. 过 H 作 b 的垂线, 交直线 a 于 G 点, 折线 $AGHB$ 即为所求.

证明 因为 H 在 BO' 的垂直平分线上, 故有

$$HB = HO'.$$

又, O 、 O' 关于直线 b 对称, 所以

$$HO' = CH.$$

而 CH 系由 AG 平移所得, 所以

$$CH = AG.$$

$$\therefore HB = AG. \quad (\text{等量传递})$$

练 习 一

试用对称方法解下列各题:

1. 设 A 、 B 是定直线 XY 同侧的两个定点, 在 XY 上求一点 O , 使得 $\angle AOX = 2\angle BOY$.

2. 已知定点 M 、 N , 试在直线 l 上求一点 P , 使得 $PM + PN$ 定长.

3. 在定直线 XY 异侧有两个定点 A 、 B , 试在 XY 上求一点 P , 使得 PA 与 PB 之差为最大.

4. 设 D 为 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上的一个定点, 试在 AD 上求点 P , 使得 $\angle BPD = \angle CPD$.

5. 在定底、定高的三角形中, 周长最短的为等腰三角形.

6. 从两定圆外的一定点到两定圆, 求作两条相等的线段, 使得它们的夹角等于定角.

7. 求作一正三角形, 使它的顶点分别落在三个已知的同心圆上.

8. 设 A 、 B 是定直线 l 同侧的两个定点, 今有一定长线段 PQ 在 l 上滑动, 试问这线段停在什么位置时, 才使得折线 $APQB$ 之长最短?

9. 求作一圆, 使切于已知角的一边于定点, 而在他边上截下定长的弦.

10. 定圆外有两定点, 求作一直径, 使它的两端同两定点的两条连线相等.

11. 在 $\triangle ABC$ 内, 求作一平行于 BC 且两端分别位于 AB 、 AC 两边的线段 EF , 使得 $AE = CF$.

12. 在 $\triangle ABC$ 内引一直线 XY , 与 AB 、 AC 分别交于 X 、 Y , 使得 $XY = l$, $AX = CY$, 其中 l 为定长.

13. 定圆中有两定弦 AB 、 CD , 试在圆周上求一点 X , 令 XA 与 XB 在 CD 上所截部分 EF 等于定长 l .

二、公式的对称

1. 对称多项式

我们知道, 对于一元二次方程 $x^2+px+q=0$, 假设它的两个根分别为 x_1 和 x_2 , 则有

$$x_1+x_2=-p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

对于上述等式的左端的表达式

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= x_1 + x_2, \\ \sigma_2 &= x_1 \cdot x_2,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 x_1 和 x_2 的地位是平等的. 也就是说, 例如在 σ_1 中, 如把 x_1 换成 x_2 , 而把 x_2 换成 x_1 , 那么得到的式子是和原式相等的, 即 $x_2+x_1=x_1+x_2$.

一般地, 对于一元 n 次方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$, 假设它的 n 个根分别是 x_1, x_2, \cdots, x_n , 那么根据根与系数关系, 有

$$\begin{aligned}x_1+x_2+\cdots+x_n &= -a_1, \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n &= a_2, \\ &\vdots \\ x_1x_2\cdots x_n &= (-1)^na_n.\end{aligned}$$

完全同样地, 对于上述等式的左端的表达式

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\
&\vdots \\
\sigma_n &= x_1x_2\cdots x_n,
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 x_1, x_2, \cdots, x_n 的地位是平等的. 也就是说, 在任一式中, 如把 x_1 换成 x_{i_1} , 把 x_2 换成 x_{i_2} , \cdots , 而把 x_n 换成 x_{i_n} (其中 i_1, i_2, \cdots, i_n 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列), 那么得到的式子是和原式相等的. 特别地, 交换任意两个字母 (例如 x_i 和 x_j), 所得的式子和原式相等.

我们知道, 由 (2) 式定义的 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 都是关于 x_1, x_2, \cdots, x_n 的 n 元多项式. 根据这些多项式的上述性质, 我们引进对称多项式的概念如下: 在 n 元多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$ 中, 如果对于任意的 i, j (其中 $1 \leq i < j \leq n$), 都有

$$\begin{aligned}
&f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \\
&= f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n),
\end{aligned} \tag{3}$$

则把这样的 n 元多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 叫做 n 元对称多项式, 或简单地叫做对称多项式.

根据上述定义, n 元对称多项式不只是由 (2) 式定义的 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 这 n 个多项式. 例如, 三元多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2,$$

读者可试加验证: 对其任意调换两个字母, 多项式是不变的. 所以, 这个多项式是一个三元对称多项式.

在 n 元对称多项式中, 我们把 (2) 式定义的 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 叫做 n 元初等对称多项式.

为什么要讨论对称多项式呢? 这是因为对称多项式有许多重要的性质, 例如:

1. 两个对称多项式的和、差、积仍是对称多项式.

2. 关于初等对称多项式 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 的多项式, 仍是关于 x_1, x_2, \dots, x_n 的对称多项式.

特别重要的, 还有上述后一性质的逆命题, 亦即:

对称多项式基本定理 任意一个 n 元对称多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 都可以表示为初等对称多项式 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 的多项式:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n). \quad (4)$$

为了证明上述定理, 需要先介绍关于多元多项式的项的字典排列法, 并引进首项的概念.

我们知道, 尽管多元多项式也有次数的概念, 但是它与一元多项式不一样, 对它的项一般不适宜进行升幂排列或降幂排列, 这就要引进一种新的排列方法——字典排列法.

每一单项式, 它的各个字母的幂指数可组成一个 n 元有序非负整数组. 因此, 每一单项式都可对应一个 n 元有序非负整数组 (k_1, k_2, \dots, k_n) . 对应是一一的. 若两个单项式, 它们对应的 n 元数组分别是:

$$(k_1, k_2, \dots, k_n), \quad (l_1, l_2, \dots, l_n),$$

那么, 那一个排在前呢? 按字典排列法, 就是先比较第一个字母的幂指数 k_1, l_1 , 若有大小, 就将大的排在前, 例如若 $k_1 > l_1$, 就将 (k_1, k_2, \dots, k_n) 排在前面; 若 $l_1 = k_1$, 那么再比较第二个字母的幂指数, 若有大小, 大的排在前, 若相等则再比较第三个字母的幂指数, 依此类推. 精确地说, 可以对 $(k_1, k_2, \dots, k_n), (l_1, l_2, \dots, l_n)$ 的先后顺序作如下规定: 如果数

$$k_1 - l_1, \quad k_2 - l_2, \quad \dots, \quad k_n - l_n$$

中第一个不为零的数是正的, 即 $i \leq n$ 使得

$$k_1 - l_1 = 0, \quad \dots, \quad k_{i-1} - l_{i-1} = 0, \quad k_i - l_i > 0,$$

那么, 我们就称 (k_1, k_2, \dots, k_n) 先于 (l_1, l_2, \dots, l_n) . 并记为

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) > (l_1, l_2, \dots, l_n).$$

这样就可把一个多项式的各个项按字典排列法排出。例如 $x_1x_2^2x_3^2 + 2x_1^2x_2 + 3x_1^3$ ，按字典排列法可记成

$$3x_1^3 + 2x_1^2x_2 + x_1x_2^2x_3^2.$$

同时，由定义立即可看出，对于任意两个 n 元数组，关系

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) > (l_1, l_2, \dots, l_n),$$

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) = (l_1, l_2, \dots, l_n),$$

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) < (l_1, l_2, \dots, l_n)$$

中，有一个且仅有一个成立，而且，关系“ $>$ ”具有传递性，也就是说，如果

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) > (l_1, l_2, \dots, l_n),$$

$$(l_1, l_2, \dots, l_n) > (m_1, m_2, \dots, m_n),$$

那么必有

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) > (m_1, m_2, \dots, m_n).$$

这是因为，由 $k_i - m_i = (k_i - l_i) + (l_i - m_i)$ 即可得出上面结论。

将多元多项式按字典排列后，第一个系数不为零的单项式，叫做这个多项式的首项。注意，这里的首项，它的次数并不一定是最大的，这一点与一元多项式是不一样的。

现在证明：两个多元多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ 、 $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ 的乘积 $f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n)$ 的首项，等于 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的首项和 $g(x_1, \dots, x_n)$ 的首项之积。

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的首项为

$$ax_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}, \quad \text{其中 } a \neq 0$$

$g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的首项为

$$bx_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}. \quad \text{其中 } b \neq 0$$

为了证明它们的积

$$abx_1^{p_1+q_1}x_2^{p_2+q_2}\cdots x_n^{p_n+q_n}$$

为 fg 的首项, 其实只需证明 n 元数组

$$(p_1+q_1, p_2+q_2, \dots, p_n+q_n)$$

先于乘积中其他单项式的幂指数即可. 事实上, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中其他单项式的幂指数, 只能是

$$(p_1+k_1, p_2+k_2, \dots, p_n+k_n),$$

或

$$(l_1+q_1, l_2+q_2, \dots, l_n+q_n),$$

或

$$(l_1+k_1, l_2+k_2, \dots, l_n+k_n),$$

其中 $(p_1, p_2, \dots, p_n) > (l_1, l_2, \dots, l_n)$, $(q_1, q_2, \dots, q_n) > (k_1, k_2, \dots, k_n)$, 而

$$(p_1+q_1, p_2+q_2, \dots, p_n+q_n)$$

$$> (p_1+k_1, p_2+k_2, \dots, p_n+k_n)$$

与

$$(p_1+q_1, p_2+q_2, \dots, p_n+q_n)$$

$$> (l_1+q_1, l_2+q_2, \dots, l_n+q_n)$$

是显然的. 同样, 显然也有

$$(l_1+q_1, l_2+q_2, \dots, l_n+q_n)$$

$$> (l_1+k_1, l_2+k_2, \dots, l_n+k_n).$$

所以, 由传递性, 即可得

$$(p_1+q_1, p_2+q_2, \dots, p_n+q_n)$$

$$> (l_1+k_1, l_2+k_2, \dots, l_n+k_n).$$

这样, 就证明了 $abx_1^{p_1+q_1}x_2^{p_2+q_2}\dots x_n^{p_n+q_n}$ 不能与乘积中其它的项同类而相消, 并且它先于所有其它的项, 因而它是首项.

现在来给出对称多项式基本定理的证明.

证 明 设 n 元对称多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 按字典排列的首项为

$$ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}, \quad \text{其中 } a \neq 0, \quad (5)$$

作为首项,各字母的幂次应满足

$$l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_n \geq 0.$$

(如果不然,可设对某个 i 有 $l_i < l_{i+1}$, 由于 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是对称多项式, 它必定在含有 (5) 式的同时, 也含有单项式 $ax_1^{l_1}\cdots x_i^{l_i+1}x_{i+1}^{l_{i+1}-1}\cdots x_n^{l_n}$. 按字典排列, 它必须先于 (5) 式, 这就与 (5) 式是多项式首项的假设矛盾.)

构造一个对称多项式:

$$\varphi_1 = a\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_n^{l_n}.$$

因为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 的首项分别为 $x_1, x_1x_2, \cdots, x_1x_2\cdots x_n$, 因此上式展开后, 首项为

$$ax_1^{l_1-l_2}(x_1x_2)^{l_2-l_3}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)^{l_n} = ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}.$$

这样, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 φ_1 就有了相同的首项. 令 $f_1 = f - \varphi_1$, 即

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - a\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_n^{l_n}.$$

这时, 因为 f 和 φ_1 有相同的首项, 相减时可消去, 因此相减后得到的多项式 $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 必定比 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 有较“小”的首项. 所谓较“小”的首项, 是指: $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的首项, 按字典排列法, 应排在 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的首项之后.

重复上述作法, 并且不断继续下去, 我们就能得到一系列的对称多项式:

$$f, \quad f_1 = f - \varphi_1, \quad f_2 = f_1 - \varphi_2, \quad \cdots,$$

其中 $\varphi_i (i=1, 2, \cdots)$ 是 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 的多项式, 它们的首项一个比一个来得“小”. 由于给定的幂次一定是有限正整数, 所以多项式 φ_i 的个数也是有限的. 我们不妨假设有 h 个 φ_i . 此时, 由于

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f - \varphi_1, \\
 f_2 &= f_1 - \varphi_2, \\
 &\vdots \\
 f_{h-1} &= f_{h-2} - \varphi_{h-1}, \\
 0 &= f_h = f_{h-1} - \varphi_h.
 \end{aligned}$$

移项后相加, 得 $0 = f - \varphi_1 - \varphi_2 - \cdots - \varphi_h$, 即

$$f = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_h.$$

这就是说, n 元多项式 f 可以表示成一些由 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 组成的单项式 φ_i (其中 $i=1, 2, \cdots, h-1$) 之和. 换言之, 任意的 n 元对称多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 确实可以表示成为一个由初等对称多项式组成的多项式. 定理证毕.

其实, 定理的证明过程, 也告诉了我们一种具体的方法.

[例 1] 把三元对称多项式 $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ 表示成 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的多项式.

解 $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ 的首项为 x_1^3 , 它的幂次为 $(3, 0, 0)$. 作

$$\varphi_1 = \sigma_1^3 - 0\sigma_2^0 - 0\sigma_3^0 = \sigma_1^3.$$

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f - \varphi_1 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \sigma_1^3 \\
 &= -3(x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + \cdots) - 6x_1x_2x_3.
 \end{aligned}$$

进一步, f_1 的首项是 $-3x_1^2x_2$, 它的幂次为 $(2, 1, 0)$. 作

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 &= -3\sigma_1^2 - 1\sigma_2^1 - 0\sigma_3^0 = -3\sigma_1\sigma_2 \\
 &= -3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\
 &= -3(x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + \cdots) - 9x_1x_2x_3.
 \end{aligned}$$

因而

$$f_2 = f_1 - \varphi_2 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 = 3x_1x_2x_3 = 3\sigma_3.$$

于是

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

对于齐次的对称多项式, 还可以用待定系数法来求解. 由

定理的证明,我们看到 φ_i 完全由对称多项式 f, f_1, f_2, \dots 的首项决定, 而且这些首项必定满足以下条件:

1. 每一 f_i 的首项都“小”于 f 的首项, 并且, 若 $i > j$, 那么 f_i 的首项“小”于 f_j 的首项.

2 每一首项的幂次的 n 元数组 k_1, k_2, \dots, k_n 满足不等式

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n.$$

3. 每一首项的次数都等于齐次多项式的次数.

综上所述, “小”于 f 的首项的一切可能的项的相应 n 元数组, 可以按次列出, 然后用待定系数法决定系数.

[例 2] 把齐次多项式 $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + x_3^2 x_4^2$ 化为用初等对称多项式表示的形式.

解 因为指数组只可能取表格左边的值

指数组				对应的初等对称多项式
2	2	0	0	$\sigma_1^2 - 2\sigma_2^1 - 0 = \sigma_2^2$
2	1	1	0	$\sigma_1^2 - 1\sigma_2^1 - 1\sigma_3^1 - 0 = \sigma_1\sigma_3$
1	1	1	0	$\sigma_1^1 - 1\sigma_2^1 - 1\sigma_3^1 - 1\sigma_4^1 - 0 = \sigma_4$

因此, 多项式 f 总可以写成以下形式.

$$f = \sigma_2^2 + A\sigma_1\sigma_3 + B\sigma_4, \quad (6)$$

其中系数 A, B 待定.

分别设定 x_1, x_2, x_3, x_4 的值, 并算出 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ 以及 f 的值, 列表如下:

x_1	x_2	x_3	x_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	f
1	1	1	0	3	3	1	0	3
1	-1	1	-1	0	-2	0	1	6

将它们代入 (6) 式, 就得相应的方程组

$$\begin{cases} 9+3A=3, \\ 4+B=6. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A=-2, \\ B=2. \end{cases}$$

所以齐次对称多项式 f 可表示成

$$f = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_4.$$

现在来考虑对称多项式理论在一元 n 次方程中的一个应用. 对于

$$f(x) \equiv x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

它的 n 个根设为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 这些根差积的平方为:

$$D = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

显然, D 是一个对称多项式(读者可直接按定义验证), 并且, 差积平方等于 0 (即 $D = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = 0$) 是 $f(x)$ 有重根的充分必要条件. 因此, D 可以作为 $f(x) = 0$ 是否有重根的判别式.

既然 D 是对称多项式, 按基本定理, 它应该可以表示成初等对称多项式 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 的多项式, 根据根与系数的关系, D 当然可以表示为方程系数 a_1, a_2, \cdots, a_n 的多项式. 这样, 我们就可以通过方程的系数而求得 D , 从而判别 $f(x) = 0$ 是否有重根.

[例 3] 试求 $f(x) = x^2 + a_1x + a_2 = 0$ 的重根判别式.

解 按初等代数的解法, 易知它的判别式为 $a_1^2 - 4a_2$. 下面我们用对称多项式的理论来求解.

令 $f(x)$ 的两个根为 α_1, α_2 , 所以

$$D = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2.$$

根据根与系数的关系,

$$-a_1 = \sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_2 = \sigma_2 = \alpha_1 \alpha_2.$$

因为 D 的首项为 α_1^2 , 可以令

$$\varphi_1 = \sigma_1^2 - 0 \cdot \sigma_2 = \sigma_1^2 = \alpha_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2,$$

$$\begin{aligned} f_1 = D - \varphi_1 &= \alpha_1^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 - (\alpha_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2) \\ &= -4\alpha_1 \alpha_2 = -4\sigma_2, \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = -4\sigma_2,$$

所以 $D = \sigma_1^2 - 4\sigma_2^2 = \alpha_1^2 - 4a_2.$

可见, 与初等代数中的结果相同. 虽然这里计算反较麻烦, 但是它的优点在于能推广到高次方程.

[例 4] 求方程 $f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ 的重根判别式,

解 设方程 $f(x) = 0$ 的根为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3.$

$$D = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2.$$

显然, 其首项为 $\alpha_1^4 \alpha_2^2$, 且 D 为齐次多项式, 我们可以使用待定系数法.

指	数	组	对应的初等对称多项式
4	2	0	$\sigma_1^2 \sigma_2^2 = a_1^2 a_2^2$
4	1	1	$\sigma_1^3 \sigma_3 = a_1^3 a_3$
3	3	0	$\sigma_2^3 = a_2^3$
3	2	1	$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = a_1 a_2 a_3$
2	2	2	$\sigma_3^2 = a_3^2$

令相应的初等对称多项式的系数为 $1, A, B, C, D$, 就有

$$D = \sigma_1^2 \sigma_2^2 + A \sigma_1^3 \sigma_3 + B \sigma_2^3 + C \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + D \sigma_3^2.$$

给定 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的 4 组值, 就可定出系数 A, B, C, D 等. 具体解法如下: 先给 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 以 1, 1, 0 值, 然后计算出 $\sigma_1,$

σ_2, σ_3, D 的值,再给 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 以另一组值等,具体见下表

α_1	α_2	α_3	σ_1	σ_2	σ_3	D
1	1	0	2	1	0	0
1	1	1	3	3	1	0
2	-1	1	2	-1	-2	36
1	-1	-1	-1	-1	1	0

代入上式,得方程组

$$\begin{cases} B = -4, \\ 27A + 9C + D = 27, \\ 16A - 4C - 4D = -28, \\ A - C - D = 5. \end{cases}$$

解得: $A = -4, B = -4, C = 18, D = -27$. 所以有

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 \\ &= \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 4\sigma_1^3 \sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - 27\sigma_3^2 \\ &= a_1^2 a_2^2 - 4a_1^3 a_3 - 4a_2^3 + 18a_1 a_2 a_3 - 27a_3^2. \end{aligned}$$

2. 解 例

在初等代数中,常常会遇到一些与对称多项式有联系的问题. 如对称多项式的因式分解,求解由对称方程构成的方程组,等等. 这类问题,我们可统而称之为对称型的代数问题. 解答这些问题的方法变化较大,比较灵活. 因而,有时仅凭一些初等的方法,往往会感到无从下手,而应用上面的关于对称多项式的知识,情况就能大为改观.

为了求解对称型代数问题,我们对上面的对称多项式理论尚需作一些补充,推导出一些与应用更为直接有关的公式.

在解题时，我们常常要用到下面形状的对称多项式：

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, \quad (k=1, 2, 3 \cdots)$$

也就是关于字母 x_1, x_2, \cdots, x_n 的 k 次幂的和式，这种多项式叫做等次幂的和。

我们先引进一个符号。现在有 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 是字母 x_1, x_2, \cdots, x_n 的幂的乘积（其中某些字母的幂可以为零）。今后我们用

$$C(ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n})$$

来表示由 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ ，经字母的所有可能的置换所得的一切项的和。显然 $C(ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n})$ 是关于 x_1, x_2, \cdots, x_n 的对称多项式，并且每个项的次数也是相等的。

例如：

$$C(x_1) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$C(x_1x_2) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,$$

$$C(3x_1^2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + \cdots + 3x_n^2,$$

$$\begin{aligned} C(x_1^2x_2) &= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + \cdots + x_1^2x_n \\ &\quad + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + \cdots + x_2^2x_n \\ &\quad + \cdots + x_n^2x_1 + x_n^2x_2 + \cdots + x_n^2x_{n-1}. \end{aligned}$$

我们还可以知道，每一个含有 n 个未知量的对称多项式，如果含有 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 这样的项，那么该对称多项式也必定含有 $C(ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n})$ 中的其它的项。

通过对称多项式基本定理， S_k 可以由初等对称多项式表出。但是，当 k 增大时，用前面介绍的方法去求出这些表达式极为烦琐、困难，因此需要另辟溪径。我们以下就是通过考察多项式 S_1, S_2, \cdots 和 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 之间的关系来解决问题。

首先，我们有

$$S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sigma_1.$$

其次,当 $k \leq n$ 时,因为

$$S_{k-1} = x_1^{k-1} + x_2^{k-1} + \cdots + x_n^{k-1},$$

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

所以,通过计算归并,有

$$\begin{aligned} S_{k-1}\sigma_1 &= (x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k) + (x_1^{k-1}x_2 + \cdots + x_n^{k-1}x_{n-1}) \\ &= S_k + O(x_1^{k-1}x_2). \end{aligned}$$

可以逐一验证下列式子的正确性:

$$S_{k-1}\sigma_1 = S_k + O(x_1^{k-1}x_2),$$

$$S_{k-2}\sigma_2 = O(x_1^{k-1}x_2) + O(x_1^{k-2}x_2x_3),$$

$$\vdots$$

$$S_{k-i}\sigma_i = O(x_1^{k-i+1}x_2 \cdots x_i) + O(x_1^{k-i}x_2 \cdots x_{i+1}),$$

(其中 $2 \leq i \leq k-2$)

$$\vdots$$

$$S_1\sigma_{k-1} = O(x_1^2x_2 \cdots x_{k-1}) + k\sigma_k.$$

依次对上面各式乘上 $-1, 1, -1, 1, \cdots$, 全部相加后, 再把各项移到一边, 就得到下面的公式:

$$S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^{k-1}S_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0. \quad (7)$$

我们再来看,当 $k > n$ 时,用类似的计算,我们也可验证下列式子的正确性:

$$S_{k-1}\sigma_1 = S_k + O(x_1^{k-1}x_2),$$

$$S_{k-2}\sigma_2 = O(x_1^{k-1}x_2) + O(x_1^{k-2}x_2x_3),$$

$$\vdots$$

$$S_{k-i}\sigma_i = O(x_1^{k-i+1}x_2 \cdots x_i) + O(x_1^{k-i}x_2 \cdots x_{i+1}),$$

(其中 $2 \leq i \leq n-1$)

$$\vdots$$

$$S_{k-n}\sigma_n = O(x_1^{k-n+1}x_2 \cdots x_n).$$

同上,可得

$$S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 - \cdots (-1)^n S_{k-n}\sigma_n = 0. \quad (8)$$

公式(7)、(8)叫做牛顿公式,它们将等次幂和式与初等对称多项式联系了起来,通过计算,可以进一步写出用 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 所表示的 S_1, S_2, S_3, \cdots 的公式,当 $k \leq n$ 时,

$$S_1 = \sigma_1;$$

因为 $S_2 - S_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$, 所以

$$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2;$$

因为 $S_3 - S_2\sigma_1 + S_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$, 所以

$$S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

整理后,可以一并写出:

$$S_0 = x_1^0 + \cdots + x_n^0 = n,$$

$$S_1 = x_1 + \cdots + x_n = \sigma_1,$$

$$S_2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$

$$S_3 = x_1^3 + \cdots + x_n^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,$$

$$S_4 = x_1^4 + \cdots + x_n^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4,$$

$$S_5 = x_1^5 + \cdots + x_n^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

$$- 5\sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_2\sigma_3 + 5\sigma_5,$$

$$S_6 = x_1^6 + \cdots + x_n^6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 6\sigma_1^3\sigma_3 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 6\sigma_1^2\sigma_4$$

$$- 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 6\sigma_1\sigma_5 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_2\sigma_4 + 3\sigma_3^2 - 6\sigma_6.$$

这里特别要注意,上述关于 S_k 的公式,是在 $k \leq n$ 的条件之下写出的,当 $k > n$ 时, S_k 的表达式是不一样的例如,当 $n=3$ 时, S_1, S_2, S_3 的公式如上,而 S_4, S_5, S_6, \cdots 的公式就与上不一样:

$$S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2$$

$$S_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_2\sigma_3,$$

$$S_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 6\sigma_1^3\sigma_3 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 3\sigma_3^2.$$

[例 5] 解方程组
$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=3, \\ x^5+y^5+z^5=1. \end{cases}$$

解 先将上列方程组改写成

$$\begin{cases} S_1=\sigma_1=1, \\ S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=3, \\ S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_1^2\sigma_3-3\sigma_2\sigma_3=1. \end{cases}$$

由计算,得:
$$\begin{cases} \sigma_1=1, \\ \sigma_2=-1, \\ \sigma_3=-1. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+yz+zx=-1, \\ xyz=-1. \end{cases}$$

由表示根与系数关系的韦达定理, 知 x, y, z 是下面方程的根:

$$u^3-u^2-u+1=0.$$

通过因式分解, 解得

$$u=1, -1, 1.$$

所以,

$$\text{当 } x=-1 \text{ 时, } y=1, z=1;$$

$$y=-1 \text{ 时, } x=1, z=1;$$

$$z=-1 \text{ 时, } x=1, y=1$$

这三组都是方程组的解.

[例 6] 求方程组
$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^3+y^3+z^3=-18 \end{cases}$$
 的整数解.

解 由题设知.

$$\sigma_1 = x + y + z = 0,$$

$$S_3 = x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = -18,$$

解得 $\sigma_3 = -6$, 即

$$xyz = -6$$

可见 x, y, z 中必有负数. 由于 $x + y + z = 0$, x, y, z 不能全是负数, 所以 x, y, z 中只能有一个为负数. 再考虑到要求整数解, 所以 $|x|, |y|, |z|$ 必为 -6 的因数, 且 $S_3 = x^3 + y^3 + z^3 = -18$, 所以该负数的绝对值为三数中最大. 综上, 方程组的整数解应为

若 $x = -3$ 则

$$\begin{cases} y = 1, 2, \\ z = 2, 1; \end{cases}$$

若 $y = -3$ 则

$$\begin{cases} x = 1, 2, \\ z = 2, 1; \end{cases}$$

若 $z = -3$, 则

$$\begin{cases} x = 1, 2, \\ y = 2, 1. \end{cases}$$

验证后可知, 上面列出的六组解均为原方程组的整数解.

[例 7] 已知方程 $x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$ 的四个实数根成等差数列, 且 $m > 0$, 求 m 的值.

解 设

$$x_1 = a - 3d,$$

$$x_2 = a - d,$$

$$x_3 = a + d,$$

$$x_4 = a + 3d.$$

由根和系数的关系, 得 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \sigma_1 = 0$, 即

$$4a = 0,$$

所以

$$a = 0.$$

又 $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_3x_4 + x_4x_1 = -10d^2 = -(3m+2)$, 所以

$$d^2 = \frac{3m+2}{10}.$$

再有 $x_1x_2x_3x_4 = m$, 即

$$9d^4 = m^2.$$

因为 $m > 0$, 所以

$$3d^2 = m.$$

再由上式, 可得

$$\frac{3m+2}{10} = \frac{m}{3},$$

即

$$9m+6=10m.$$

所以

$$m = 6$$

[例 8] 设 $x+y+z=0$, 求证:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} \cdot \frac{x^3+y^3+z^3}{3} = \frac{x^5+y^5+z^5}{5}.$$

证明 由题设, 知

$$S_1 = \sigma_1 = x+y+z=0.$$

考虑到:

$$x^2+y^2+z^2 = S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -2\sigma_2,$$

所以

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} = -\sigma_2.$$

而

$$x^3 + y^3 + z^3 = S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 3\sigma_3,$$

所以

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} = \sigma_3.$$

再因为

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 + z^5 &= S_5 \\ &= \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_2\sigma_3 \\ &= -5\sigma_2\sigma_3, \end{aligned}$$

所以

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = -\sigma_2\sigma_3.$$

联接上面两式,就有

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \cdot \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} = \frac{x^5 + y^5 + z^5}{5}.$$

下面, 我们再用它对多项式作因式分解.

[例 9] 分解 $f(x, y, z) = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4$ 的因式.

解 考虑到 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$, 就有

$$\begin{aligned} 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) &= (x^2 + y^2 + z^2)^2 - (x^4 + y^4 + z^4) \\ &= S_2^2 - S_4 \\ &= (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 \\ &\quad + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3) \\ &= 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1\sigma_3. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1\sigma_3 - (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3) \\
 &= -\sigma_1^4 + 4\sigma_1^2\sigma_2 - 8\sigma_1\sigma_3 \\
 &= \sigma_1(-\sigma_1^3 + 4\sigma_1\sigma_2 - 8\sigma_3).
 \end{aligned}$$

可见 $f(x, y, z)$ 能被 $\sigma_1 = x + y + z$ 整除. 由于 $f(x, y, z)$ 是对称多项式, 并且各项只含 x, y, z 的偶数幂, 所以有 $f(x, y, z) = f(-x, y, z) = f(x, -y, z) = f(x, y, -z)$, 即 $f(x, y, z)$ 也必定被 $-x + y + z, x - y + z, x + y - z$ 整除. 所以

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z) \\
 &\quad \times (x + y - z)Q(x, y, z),
 \end{aligned}$$

其中 $Q(x, y, z)$ 为 x, y, z 的多项式. 考虑到 $f(x, y, z)$ 是四次齐次多项式, 所以 $Q(x, y, z)$ 只能是零次多项式, 于是令:

$$Q(x, y, z) = k \quad (\text{常数}),$$

且

$$x = y = z = 1$$

时, 可求得 $k = 1$. 从而可知, 原多项式可以分解为

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4 \\
 &= (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z).
 \end{aligned}$$

练 习 二

1. 用初等对称多项式表示下列对称多项式:

- (1) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$.
- (2) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$.
- (3) $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2$.
- (4) $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$.

2. 解方程组:
$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3. \end{cases}$$

3. 解方程组:
$$\begin{cases} x+y+z=11, \\ x^2+y^2+z^2=155, \\ yz=63. \end{cases}$$

4. 如果 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^3=0$, 则

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2}{2} \cdot \frac{x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5}{5} \\ = \frac{x_1^7+x_2^7+x_3^7+x_4^7+x_5^7}{7}.$$

5. 设 a_1, a_2, a_3 是方程 $5x^3 - 6x^2 + 7x - 8 = 0$ 的三个根, 计算:
 $(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)(a_2^2+a_2a_3+a_3^2)(a_1^2+a_1a_3+a_3^2).$

6. 已知三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的三个根成等差级数, 则
 $2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0.$

7. 求一个四次方程, 使 $S_1=S_2=S_3=0.$

8. 设 a, b, c 为任意三角形的三边长, $\sigma_1=a+b+c$, $\sigma_2=ab+bc+ca$, 求证: $3\sigma_2 \leq \sigma_1^2 < 4\sigma_2.$

三、群及其在晶体分类中的应用

1. 群 的 概 念

前面我们较为详细地讲述了图形的对称和公式的对称，同时也介绍了一些利用对称性质解题的方法。为了进一步了解对称，在量的方面对它作进一步的计算，我们将引进现代数学中的一个新概念——群。在普通的日常语言中，所谓“群”，乃群体也，它无非是指由若干个体组成的一个集体，并且具有某些共同的特征。数学中的“群”这个概念，尽管抽象一点，但和生活用语中“群”的概念又很相仿，它是具有某种结构的集合，它由某些数学研究的对象组成，并且具有某些性质。

我们先看几个例子：

[例 1] 有个正三角形 $\triangle ABC$ ，试讨论它的所有对称变换具有的性质。

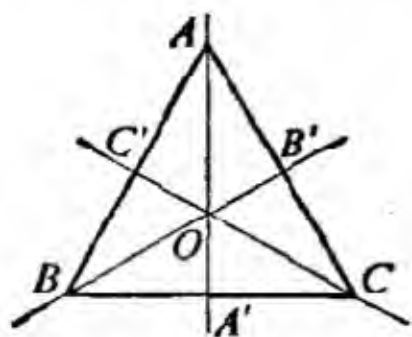


图 3-1

首先，让我们来找出它的对称变换，见图 3-1。连结 AA' ，作过 AA' 且垂直 $\triangle ABC$ 所在平面的镜面 σ_A 。将 $\triangle ABC$ 以 σ_A 作反射变换。显然，变换后的象仍然是一三角形，并且和原 $\triangle ABC$ 占据

相同的空间位置，不过三角形的顶点的位置是变动过的。它们分别是： $A \rightarrow A$ $B \rightarrow C$, $C \rightarrow B$ 。

用类似的方法，作过 BB' 且垂直 $\triangle ABC$ 所在平面的镜面 σ_B 。对 $\triangle ABC$ 作关于 σ_B 的反射变换，变换前后的图形也

会重合，而顶点的位置也变动了。它们分别是： $A \rightarrow C, B \rightarrow B, C \rightarrow A$ ，完全相仿地，可以作镜面 σ_O ，当对 $\triangle ABC$ 作关于 σ_O 的反射变换后，图形不变，但顶点位置改变了。它们是： $A \rightarrow B, B \rightarrow A, C \rightarrow C$ 。

此外，我们还可以找出正三角形 ABC 的另外一些对称变换。我们知道，平面 $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_O$ 相交于直线 L ， L 垂直于 $\triangle ABC$ 所在平面，并且交于 AA', BB', CC' 的交点 O 。如果以 L 为旋转轴，又可以得三个旋转变换： C_3^0, C_3^1, C_3^2 ，分别对应的旋转角度为 $360^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ ，它们也都是 $\triangle ABC$ 的对称变换，也就是说，当对 $\triangle ABC$ 作 C_3^0 ，或 C_3^1 ，或 C_3^2 旋转变换时，变换前后的图形重合。不过顶点的位置是变动过的，具体地说，它们分别是： $C_3^0: A \rightarrow A, B \rightarrow B, C \rightarrow C$ ； $C_3^1: A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A$ ； $C_3^2: A \rightarrow C, B \rightarrow A, C \rightarrow B$ 。至此，我们已找到关于 $\triangle ABC$ 六个不同的对称变换，这些变换组成集合 $G = \{\sigma_A, \sigma_B, \sigma_O, C_3^0, C_3^1, C_3^2\}$ 。下面我们来讨论集合 G 的性质。

首先让我们来介绍变换乘法的概念。如果对图形作变换 A 之后，相继再作变换 B ，其结果和对图形作一次变换 C 相同，那么我们就称该变换 C 为两次相继变换 A 和 B 的乘积，并且记作： $BA = C$ 。

我们在例 1 中说到的变换集 G 的变换，就有相乘的关系。例如： $C_3^1 \sigma_A = \sigma_O$ 。这是因为

$$\sigma_A: A \rightarrow A, B \rightarrow C, C \rightarrow B,$$

$$C_3^1: A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A,$$

所以 $C_3^1 \sigma_A: A \rightarrow B, B \rightarrow A, C \rightarrow C,$

而 σ_O 也有同样的对应关系：

$$\sigma_O: A \rightarrow B, B \rightarrow A, C \rightarrow C.$$

为了全面地考察这些变换之间的关系，我们可以详细地把六

个变换相应的乘积列成表格:

	C_3^0	C_3^1	C_3^2	σ_A	σ_B	σ_C
C_3^0	C_3^0	C_3^1	C_3^2	σ_A	σ_B	σ_C
C_3^1	C_3^1	C_3^2	C_3^0	σ_C	σ_A	σ_B
C_3^2	C_3^2	C_3^0	C_3^1	σ_B	σ_C	σ_A
σ_A	σ_A	σ_B	σ_C	C_3^0	C_3^1	C_3^2
σ_B	σ_B	σ_C	σ_A	C_3^2	C_3^0	C_3^1
σ_C	σ_C	σ_A	σ_B	C_3^1	C_3^2	C_3^0

从表中直接看出, G 中任意两个变换的乘积仍然是 G 中的变换, 这称为集合 G 关于乘法是封闭的. 我们还可从表中看到, 这些变换关于乘法具有下面三个性质:

1°. 结合律. 任意三个变换相乘的结果, 与相乘的次序无关. 例如: $(C_3^1\sigma_A)\sigma_B = C_3^1(\sigma_A\sigma_B) = C_3^2$.

2°. G 中有恒等变换 C_3^0 , 任何变换和它相乘后不变. 例如: $C_3^0C_3^2 = C_3^2C_3^0 = C_3^2$.

3°. G 中每个变换都有逆变换, 即对 G 中任何变换, 都存在某一变换(也是 G 中的), 使得两者的乘积为恒等变换. C_3^0 , C_3^1 , C_3^2 , σ_A , σ_B , σ_C 的逆变换分别是 C_3^0 , C_3^2 , C_3^1 , σ_A , σ_B , σ_C . 例如: $C_3^1C_3^2 = C_3^0$, $\sigma_A\sigma_A = C_3^0$.

下面我们将讲述另一个例子, 为此我们需要引进一个新的概念, 它就是置换. 所谓置换, 是指对 n 个元素所组成的集合, 实施这样的一个替换: 使得集合中每一元素由集合中某一元素替代, 而且不同的元素要被不同的元素替代.

例如, 我们取三个元素组成的集合, 元素分别用 1, 2, 3 表示; 当以元素 1, 3, 2 分别替代 1, 2, 3 时, 我们就对集合实施了一次置换, 用符号 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 表示这个置换, 并记作 E_3 ;

当以 2, 3, 1 替代 1, 2, 3 时, 我们就得到置换 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
 这样的置换一共有六个, 除上述 E_1, E_3 外, 还有

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

通过计算, 我们还可以见到: 对三个元素的集合相继实施两次置换的结果, 可以与某一个置换相同, 我们称后者是前两置换的乘积. 例如

$$E_3 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = E_4.$$

注意, 这里的运算次序不能搞反了: 等号左边的两个置换中, 右边的 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 先发生作用, 左边的 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 后发生作用. 以下我们可以讨论由置换组成的集合关于置换的乘法的性质.

[例 2] 由六个置换:

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

组成的集 S_3 . 按置换的乘法可以制成表格如下:

	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_0	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1	E_1	E_2	E_0	E_4	E_5	E_3
E_2	E_2	E_0	E_1	E_5	E_3	E_4
E_3	E_3	E_4	E_5	E_0	E_1	E_2
E_4	E_4	E_5	E_3	E_1	E_2	E_0
E_5	E_5	E_3	E_4	E_2	E_0	E_1

从表上也可直接看出，置换集合 S_3 关于置换的乘法是封闭的，也就是说， S_3 中任意两个置换的乘积仍然是 S_3 中的一个置换。

例如： $E_4 E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$

E_1 。并且，还可以看到置换关于乘法还有下面三个性质：

1° 结合律成立。任意三个置换的乘积的结果与相乘的次序无关。例如： $E_1(E_2 E_3) = (E_1 E_2) E_3$ 。

2° 有单位置换（恒等置换） E_0 ，任何置换和它相乘保持不变。例如： $E_0 E_3 = E_3 E_0 = E_3$ 。

3° S_3 中每一置换都有逆置换，即对 S_3 中任何置换，都存在 S_3 中某一置换，使得两者的乘积为恒等置换。例如 E_1 的逆置换是 E_2 ，即 $E_2 E_1 = E_0$ 。从表上可以看出， $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$ 的逆置换分别是： $E_0, E_2, E_1, E_3, E_5, E_4$ 。

从例 1 和例 2 中可以看到一些共同点。首先，研究的对象都是某些元素组成的集合，例 1 是指某些对称变换的集合；例 2 是某些置换的集合。其次，在它们的元素之间都可以实施某种运算。例 1 指的是能实施变换的乘法运算；例 2 指的是能实施置换的乘法运算。另外，它们对乘法运算都具有某些性质。满足结合律；有单位元（恒等变换或恒等置换）；有逆

元(逆变换或逆置换)。至此,我们可以概括出群的概念。

如果集合 G 中能实施一种运算“ \circ ”(也就是说, G 中的元素关于运算“ \circ ”是封闭的),并且满足条件:

G_1^0 集合 G 中的元素关于乘法运算“ \circ ”满足结合律,即集合 G 中任意三个元素实施乘法的结果与次序无关。用符号表示可以写成:对任意元素 $a, b, c \in G$, 则有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

G_2^0 G 中有单位元 e , 即对于任意 $a \in G$, 都有

$$(a \circ e) = (e \circ a) = a.$$

G_3^0 G 中任一元 a 都有逆元, 即 $a \in G$, 总存在一元素 $a^{-1} \in G$, 使得

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

这时,我们称集合 G 是一个群。

根据这个定义,我们可以知道,例 1 是变换群,例 2 是一置换群。

我们也可以容易地判定以下集合成群。

[例 3] 全体整数集合 $\mathbf{Z} = \{\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ 关于普通的加法运算成群。

首先我们可以看到,任意两个整数的和仍为整数,即整数集关于加法是封闭的。其次可以看出整数集关于加法满足三条件:

1 对任意的 $a, b, c \in \mathbf{Z}$, 显然有

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

2° 存在着 0, 对任意整数 $a \in \mathbf{Z}$ 而言,总有

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

其中 0 就是单位元。

3° 对任意整数 $a \in \mathbf{Z}$, 总存在 $-a \in \mathbf{Z}$, 有

$$a + (-a) = (-a) + a = 0,$$

其中 $-a$ 就是 a 的逆元.

注意. 群的定义中的“运算”, 是具体的运算的概括和抽象, 它可以指我们熟悉的数的加法, 乘法运算, 同时也可指一些为我们所不熟悉的运算, 如变换、置换、以至其它的运算.

[例 4] 只含数 0 的集合, 对数的加法成群.

[例 5] 只含数 1 的集合, 对数的乘法成群.

[例 6] 只含数 1 和 -1 的集合, 对数的乘法成群.

上述六例中, 例 1 例 2 例 4、例 5、例 6 中所说的群, 由于它们的元素的个数都是有限的, 所以称之为有限群; 而例 3 中所说的群, 因为群元素个数无限, 所以称为无限群.

定义: 群 G 的非空子集 H 也构成群时, H 称为 G 的子群.

[例 7] 设 n 为一整数, 在整数加法群 \mathbf{Z} 中, 所有 n 的倍数, 对加法运算也成群. 因为两个 n 的倍数的和显然也是 n 的倍数, 即对加法是封闭的; 结合律、单位元、逆元的条件也是满足的. 因而, 它也是 \mathbf{Z} 的子群, 我们把它记作 $n\mathbf{Z}$.

[例 8] 有群 G , 只由单位元 e 组成的集合 $\{e\}$ 显然是群 G 的一个子群, 群 G 本身也是 G 的子群. 这两个子群, 所有的群都具备, 我们把它们称为平凡的, 其它类型的子群称为非平凡的了群.

[例 9] 令 $C_6 = \{C_6^0, C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5\}$ 为六次旋转轴 L 的六个旋转组成的集合, 它们的旋转角分别为 $360^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$ 等, 它们构成六阶群.

现在我们来查看集合 $C_3 = \{C_6^0, C_6^2, C_6^4\}$, 其中元素为绕 L 轴旋转角分别为 $360^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ 的三个旋转; 显然它们也是一个群, 并且由于 C_3 是 C_6 的子集, 所以 C_3 是 C_6 的子群.

同样地，我们还可以验证 $C_2 = \{C_6^0, C_6^3\}$ 也是 C_6 的子群。 C_2 关于变换的乘积成群是显然的，因此它是 C_6 的子群。

[例 10] 令 C_{2n}, C_n, \dots, C_2 分别代表阶数为 $2n, n, \dots, 2$ 的旋转群，可以验证它们关于变换的乘法是成群的，而 C_n, \dots, C_2 为 C_{2n} 的非平凡子群。

为了确定群 G 的子集 H 是否成群，似乎需要考察 H 对运算的封闭性以及是否满足成群的三条件，其实问题可以简化，无需验证全部条件。下述定理就保证了这一点。

定 理 群 G 的非空子集 H 是一个子群的充分必要条件是：对任意的元 $a, b \in H$ ，总可推得 $ab^{-1} \in H$ 。

证明 必要性是显然的，因为如果 H 是子群，且 $a, b \in H$ ，当然 b 的逆元 $b^{-1} \in H$ ，所以乘积 $ab^{-1} \in H$ 。

充分性，因为 H 非空，所以可设 $a \in H$ ，于是 $a, a \in H \subseteq G$ ，从而有 $aa^{-1} \in H$ ，即

$$e \in H.$$

这样， H 中就有了恒等元 e 。此外，由 $e, a \in H$ 可知

$$a^{-1} = ea^{-1} \in H,$$

即 H 也含有 a 的逆元。同理，由于 $e, b \in H$ ，也有

$$b^{-1} = eb^{-1} \in H.$$

这样可知，由 $a, b \in H$ 可得 $a, b^{-1} \in H$ ，从而就有

$$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H.$$

这就是说， H 对乘法来说是封闭的。至于结合律是自然满足的，因为 H 的元素都是群 G 的元素，至此，我们证明了 H 是群 G 的子群。定理证毕。

一个群，究竟有多少子群，以及子群的构造如何，这是群论所要研究的主要问题之一，至今尚未获得全部解决。对有

些类型的群来说，子群的决定问题解决得较好。例如对有限阶群就有较好的结果：有限群 G 的子群的阶数一定是群 G 的阶数的因子（这是法国著名数学家拉格朗日获得的成果，称为拉格朗日定理），它揭示了有限群 G 的子群的可能阶数。例如，如果群 G 为 15 阶，那么它的子群的阶数只可能是 1, 3, 5, 15。这样，素数阶数的群就不可能有非平凡子群。

群和对称有什么联系呢？

有某一几何图形 F ，假如我们已经找到了它的全部对称变换，那么对称变换的全体就构成了一个集合，我们把它叫做完全集合。显然，在一个完全集合中，任意两个变换的乘积仍然是完全集合中的一个变换，这就是说，完全集合关于变换的乘法是封闭的；我们还可以验证它满足成群三条件如下：

首先，完全集合中的元素都是图形 F 的对称变换，而关于变换的乘法是满足结合律的。

其次，因为完全集合包含关于图形 F 的一切对称变换，当然它也必定包含使图形 F 恒定不变的恒等变换 E ，这就表明完全集合包含单位元。

第三，完全集合中任一变换都有逆变换也是明显的。因为既然有对称变换 $\tau: F \rightarrow F'$ ，使得 F 和 F' 重合。那么使 $F' \rightarrow F$ 的变换 τ^{-1} ，必定也是对称变换，所以 τ^{-1} 也必定属于图形 F 的完全集合。

综上，我们就证得了完全集合构成群。这个群称为图形 F 的完全对称性群。

进而，我们还可以看到，图形的对称性和它的完全对称性群是密切相关的。凡对称图形，总存在若干个非恒等对称变换，这些变换的全体和恒等变换一起构成该图形的完全对称性群。反之，如果一个图形，存在着一个关于它的非平凡的对

称变换,那么该图形就是对称图形. 不是对称的图形,就不能找到非恒等的对称变换. 我们还可看到,图形的对称程度愈高,关于图形的对称变换就愈多,也就是说它的完全对称性群的元素愈多,群的阶数愈高. 由此可见,图形的对称程度的高低是与对称性群的阶数密切相关的. 这样,就启发人们用群去刻画对称图形及其性质,用群的理论去研究对称,所以人们就把群论说成是研究对称的数学理论.

2. 晶体分类中的群论方法

晶体,希腊文为“ $\kappa\rho\nu\zeta\tau\alpha\lambda\lambda\sigma$ ”,即冰的意思. 一般是指未经人工磨削而具有规则几何多面体外形的固体. 它色彩鲜艳,闪闪发光,直到十九世纪还只是用来装饰,后来被广泛地用于工业上,例如制造钻头、镜片,特别近年来在电子技术中得到了重要的应用. 可以说,今天在国民经济各生产部门,几乎已找不到不使用晶体的了.

大家知道,物质的性质是和结构有关的,即和它的分子组成成分和排列次序有关. 同样,晶体的性质也和结构有关. 1912年以来,化学家用 X 射线分析、实测了 5000 多种晶体,发现凡晶体都是由微粒(原子、分子或离子)有规则的重复排列而组成的. 晶体中微粒的排列,按照一定的方式不断地作周期性的重复,这就是晶体构造的周期性. 晶体中,周期性排列着的微粒组成的框架,称为晶格. 微粒重心的位置,称为晶格的结点,这些结点的总体,称为点阵.

例如,图 3-2 是食盐 NaCl 晶体的构造. 大球代表氯 Cl , 小球代表钠 Na . 图 3-2 表示由 Cl 和 Na 堆砌而成的小立方体,它是从食盐晶体中截割取出的极小部分. 在 $1[\text{毫米}]^3$ 的

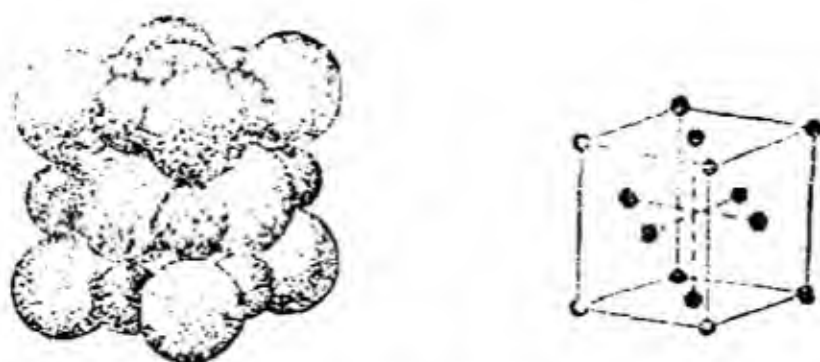


图 3-2

NaCl 晶体中,大约有 $10^{18} \sim 10^{19}$ 这样多的此类小立方体。如果按立方体的棱看一下,总是 Cl 和 Na 相间地排列着,而且两个 Cl(或 Na) 的重心之间的最小距离也总是 5.628 \AA ($1 \text{ \AA} = 10^{-8}$ 厘米),食盐晶体的构造就是由这些小单元向四方延伸而成的。

其实,一切晶体都有类似的构造,它们可以看作是由结点沿空间三个不同方向,各按一定的距离周期性地平移而构成的。可以这样想象,如果我们到晶体世界内部去“旅游”,并且始终沿笔直方向前进,那么我们在不同的地区,将会发现“风景”只会改变有限次,然后,一切又从头开始,连次序也跟前面一次相同。

由于晶格的周期性,我们可以在其中选取一定的单元,只要将它不断重复地平移,就可以得出整个晶格。平移可以在三个方向进行,如果令 a_1, a_2, a_3 (它们一般不相等)是代表晶格单元的三个棱边之长和取向的向量,我们把它们称为平移向量,这样的单元称为晶胞。晶胞和平移向量可以有不同的选取,而结果都给出完全一样的晶格。体积最小的晶胞称为元胞。构成元胞的三个平移向量叫做基本平移向量。至此我们可以见到它们有以下特点:

首先,晶体是由晶胞组成的,将晶胞平行地堆积在一起,可以充满整个晶体,这里,我们很容易想象到晶胞的形状并

非任意的，否则就不能填满晶体，譬如正四面体、六面体、正六棱柱体等就可以填满空间，而正十二面体、正二十面体就不能，这就是后面我们要说的晶体制约。

另外，晶格、点阵具有对称性，它既可以是某些平移变换的对称图形，即在某些平移变换下（例如，进行平移 α_1 ，或 α_2 ，或 α_3 ，或它们的组合等）图形不变；也可以是某些旋转、反射、反演变换的对称图形，也就是说，在某些旋转、反射、反演变换前后的晶格是重合的，在这些变换前后的点阵是重合的，这就为我们用晶格的对称性对晶体进行分类提供了根据。

对晶体进行分类，有助于认识晶体性能，是有重要意义的。分类可以按两种方式进行：一种是直观的分类，即通过观察比较各种晶体的多种性质的异同，加以归纳分类，这样的分类，工作繁重，而且对尚未发现的晶体就无从述说，当然也无法将之分类；另一种分类是理论上的分类，尽管它也有不足之处，但因分类比较完备，对直观的分类能起到补偿作用。

所谓对晶体作理论上的分类，就是利用数学概念“群”，按晶体点阵的对称程度进行分类。因为点阵的对称程度完全可以由所对应的完全对称性群决定，因此晶体的分类就被归结为它对应的完全对称性群的分类。

前面说过，点阵有两种对称性：关于平移变换的对称性和关于旋转、反射、反演变换的对称性。先考察关于旋转、反射、反演变换的对称性。容易想象，不管是旋转变换，还是反射或反演变换下的对称图形，它们在那些变换作用前后，除整个图形重合外，确实还至少存在有空间一点，在变换前后不变。如在旋转变换下，旋转轴上的每一点都不变；如在反射变换下，反射面上的每一点都不变；如在反演变换下，反演中心这点不变，而平移变换就不具有这种性质，它不能保证至少有

一点不变. 问题是,如果有一图形是旋转、反射、反演等多种变换下的对称图形,那么,对这些变换来说,是否存在共同的不变点呢?在一定条件下,回答是肯定的.

具有共同不变点的变换组成的群,称为点群. 由上面的分析可知,点群只能包含旋转、反射和反演等变换,而不能包含平移变换. 点群有两类:只含有旋转变换的点群称为第一类点群,也叫做旋转点群;除旋转变换外,还含有反演、反射以及它们的合成变换的点群叫做第二类点群.

晶体的分类,可以归结为对它的对称性群的分类. 由于在宏观观察时,晶体是一个有限图形,所以它不可能关于平移变换不变,只可能关于旋转、反射、反演变换不变. 于是,就宏观而言,晶体的对称性群是点群,而且是有限阶点群. 这样,晶体的分类又归结为点群的分类. 点群的分类在很大程度上依赖于第一类点群的分类. 因为一旦给出了所有的第一类点群,就可按一定的步骤构造出第二类点群. 以下着重讨论第一类点群的分类问题.

我们知道,两个旋转的乘积不一定仍是一个旋转. 例如,当两个旋转的轴平行,旋转角大小相等、且方向相反时,它们的乘积却是一个平移. 但是,当两个旋转的轴相交时,它们的乘积则仍是一个旋转,且旋转轴仍过这一交点. 所以,三维空间中,所有以过一点 θ 之直线为轴的旋转之集合构成关于点 θ 的旋转点群,记作 R_θ . 显然,群 R_θ 是无限的. 那么, R_θ 含有多少有限子群呢? 它们又如何分类呢? 这就是下面要回答的.

令 G 是群 R_θ 的一个有限子群,其阶 $n=n(G)$. 现在,以点 θ 为中心,作一个半径为 1 的单位球 S_r . 于是, G 中每一非恒等旋转 g 的轴与球面 S_r 相交两点,这两点在旋转 g 作用

下显然是不变点，它们称为旋转 g 的极点。点群 G 的恒等元 e 使球面 S_r 上每一点都不变，我们约定它没有极点。当然，对 G 的不同旋转，极点可以是不同的。由于 n 阶群 G 含有 $n-1$ 个非恒等旋转，每个非恒等旋转都有 2 个极点，故 G 共有 $2(n-1)$ 个极点（重合的极点按重数计数），它们所成的集合记为 S 。

任取 $x \in S$ ，也就是说， x 是 G 中某个非恒等旋转 g_1 的极点，即 $g_1 x = x$ 。设 g_2 是 G 中任意一个非恒等旋转，由于 $(g_2 g_1 g_2^{-1}) g_2 x = g_2 g_1 x = g_2 x$ ，所以， $g_2 x$ 是 G 中非恒等旋转 $g_2 g_1 g_2^{-1}$ 的极点（注意，如果 $g_2 g_1 g_2^{-1}$ 是恒等元，即 $g_2 g_1 g_2^{-1} = e$ ，则 $g_1 = g_2^{-1} e g_2 = e$ ，此为不可能）。这表明，极点集合 S 中任一点 x 经 G 中任一旋转（包括恒等元）作用后仍然变为集合 S 中的极点。于是，群 G 的每个旋转都可以看成是有限集合 S 上的置换。

现在假设 x 和 y 是 S 中两个点，如果 G 中有一个旋转 g ，使得在 g 的作用下，点 x 变为 y ，即 $y = gx$ ，那么就说点 x 和 y 是共轭的。把集合 S 中相互共轭的极点归为一类，相互不共轭的极点归在不同的类，于是， S 就分成为若干个共轭极点类。极点 x 所在的共轭类称为极点 x 在点群 G 作用下的轨道，记作 x^G 。容易看出， $x^G = \{gx : g \in G\}$ 。

仍令 x 是 G 的某个旋转的极点，显然 G 中所有使极点 x 不变的旋转变换构成 G 的子群，记作 G_x ，它称为点群 G 的使极点 x 不变的稳定子群。容易看出， $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ 。

关于点群 G 的阶数 n ，极点 x 的稳定子群 G_x 的阶数 m ，以及极点 x 所在的轨道 x^G 的长 p （即轨道 x^G 所含极点的数目），由拉格朗日定理，有 $n = mp$ 。

假设 G 有 k 个轨道，且设 x_i 是 G 的第 i 轨道的一个极

点, i 轨道 x 的长为 p_i , x_i 的稳定子群 G_{x_i} 的阶数为 n_i , 则 $n = n_i p_i$, 其中 $i = 1, 2, \dots, k$. 注意, 对于任意 $x \in x_i^G$, 它的稳定子群 G_x 的阶数 $n(G_x)$ 也满足 $n = n(G_x) p_i = n_i p_i$, 所以, $n(G_x) = n_i$. 因此, 使 i 轨道的某个极点不变的全部非恒等旋转的数目就是 $p_i(n_i - 1) = n - p_i$. 再对 k 个轨道求和, 就得到使某个极点不变的非恒等旋转的总数 $kn - \sum_{i=1}^k p_i$. 由于每个旋转都有两个极点, 所以, 如此算得的非恒等旋转总数应是 G 中非恒等旋转的总数的两倍, 即得到关系式

$$2(n-1) = kn - \sum_{i=1}^k p_i. \quad (1)$$

显然, G 的 i 轨道至少应含有一个极点, 即 $p_i \geq 1$. 由式 (1) 得,

$$2(n-1) = kn - \sum_{i=1}^k p_i \leq kn - k = k(n-1).$$

因此, $k \geq 2$. 另一方面, 子群 G_{x_i} 至少含有一个非恒等旋转, 否则 i 轨道将不含任何极点. 因此, $n_i = \frac{n}{p_i} \geq 2$, 即 $p_i \leq \frac{n}{2}$. 由式 (1) 得,

$$2(n-1) = kn - \sum_{i=1}^k p_i \geq kn - k \cdot \frac{n}{2} = k \cdot \frac{n}{2},$$

所以, $k \leq 4 - \frac{4}{n} < 4$. 于是, k 只能是 2 或 3.

当 $k=2$ 时, 由式 (1) 得 $p_1 + p_2 = 2$. 因此, $p_1 = p_2 = 1$, 从而 $n_1 = n_2 = n$. 这表明, 如果有限子群 G 只有两个轨道, 那么 G 只有两个极点, 因此, G 中所有非恒等旋转的轴都是重合的. 容易看出, 旋转角为 $2\pi/n$ 的绕固定轴的旋转所生成的 n 阶旋转群 C_n 就满足条件, $n=2, 3, \dots$.

当 $k=3$ 时, 式 (1) 化为 $n+2=p_1+p_2+p_3$. 因 $p_i=\frac{n}{n_i}$, 故

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{n}. \quad (2)$$

不妨设 $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. 因此 $\frac{3}{n_1} \geq 1 + \frac{2}{n} > 1$, 故 $n_1 < 3$. 注意 $n_1 > 1$, 故 $n_1 = 2$. 而且式 (2) 化为

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}.$$

由于 $n_2 \leq n_3$, 所以, $\frac{2}{n_2} \geq \frac{1}{2} + \frac{2}{n} > \frac{1}{2}$. 由此得到 $n_2 < 4$. 所以, n_2 或为 2 或为 3

如果 $n_2=2$, 则由式 (2) 得到 $n_3=\frac{n}{2}$. 此时, n 应为偶数;

如果 $n_2=3$, 则由式 (2) 得到 $\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n} < \frac{1}{6}$ 即 $n_3 <$

6. 因此, n_3 为 3, 4 或 5. 所以, 可能的解为

$$n_1=2, \quad n_2=n_3=3, \quad n=12,$$

$$n_1=2, \quad n_2=3, \quad n_3=4, \quad n=24,$$

$$n_1=2, \quad n_2=3, \quad n_3=5, \quad n=60.$$

至此证明了一个很重要的结论: 凡以空间中过点 θ 的直线为旋转轴的有限旋转群, 只能是下表中列举的五种. 即第一类点群只有这五种, 分别用 C_n, D_m, T, O, Y 表示.

	n	n_1	n_2	n_3	p_1	p_2	p_3
I	n	n	n		1	1	
II	n (偶数)	2	2	$n/2$	$n/2$	$n/2$	2
III	12	2	3	3	6	4	4
IV	24	2	3	4	12	8	6
V	60	2	3	5	30	20	12

注意，当一般地讨论旋转群的一切子群时， n 可以取任意自然数，因此，它们的个数可以是无限的。如以绕固定轴的旋转群 C_n 为例，群元就是无限的。这样的点群还不能直接与晶体相对应。为了使得能和晶体及其分类相似，我们还必须从中区分出与晶体相应的群，区分点群是否能成为晶体的对称性群的条件，称为晶体制约。

定义 如果对称性群 G 能够使空间某点 θ 保持不变，并且能使以 θ 为结点的晶格不变，那么 G 称为晶体点群。

前面的条件使 G 成为点群，后面的条件是与晶体的格子的对称性有关的条件。两者缺一都不能构成晶体点群。我们把后者称为晶体制约。这个条件是很强的。

我们已经知道，点群 G 中的元素，总是与某个绕轴的旋转相联的，由于要求保持 L 格子不变，这就导致对这类旋转的阶次有所限制，使得它不能取任意值。换言之，如果你随便取一个数作为 n 的值，这个 n 次旋转就不一定能使 L 格子在变换前后保持不变。下述定理就是说的这一点：

定理 晶体点群 G 中，可能的旋转轴次 n 不是任意的，只可能是 $n=1, 2, 3, 4, 6$ 。

证明 设 A, B 为 L 格子中的任意两个相邻的结点， l

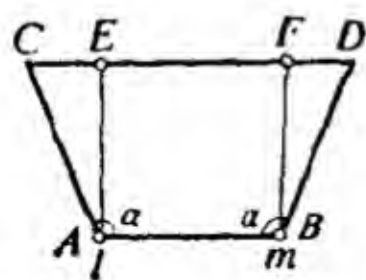


图 3-3

为过 A 点且垂直于纸面的旋转角为 α 的轴。由于空间格子 L 的结点相互是等价点（具有共同的属性），因此必定在 B 点也会有一轴 m ，它垂直于纸面，且有旋转角 α 。

现在令结点 B 和 A 分别绕轴 l, m 旋转 α 角，得到象 D 和 C ，因为 A, B 为 L 中的结点，以 l, m 为轴的 α 旋转是晶体点群中的元素，当然应保持格子 L 不变，所以 D 和 C 也一定是结点，并且有

$$\overline{AC} - \overline{BD} = \overline{AB}.$$

于是, 连结 A 、 B 、 C 、 D 成一等腰梯形, $AB \parallel CD$, 由于空间格子中相互平行的行列, 其结点的间距 (相邻两结点的距离) 必相等, 所以平行行列上任意两点的距离总是间距的整数倍, 因此就有

$$\overline{CD} = N \cdot \overline{AB},$$

其中 N 为整数. 现在过 A 、 B 点分别作 CD 的垂线 AE 和 BF , 于是有

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= \overline{CE} + \overline{EF} + \overline{FD} \\ &= \overline{AC} \cos(180^\circ - \alpha) + \overline{AB} + \overline{BD} \cos(180^\circ - \alpha) \\ &= \overline{AB}(1 - 2\cos\alpha).\end{aligned}$$

$$\therefore N = 1 - 2\cos\alpha,$$

即

$$\cos\alpha = \frac{1-N}{2}.$$

由于 $|\cos\alpha| \leq 1$, 所以解得 N 的值为

N	3	2	1	0	-1
$\cos\alpha$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
α	180°	120°	90°	60°	$0^\circ(360^\circ)$

相应于可能的旋转角: $360^\circ, 180^\circ, 120^\circ, 90^\circ, 60^\circ$, 其旋转轴次 $n=1, 2, 3, 4, 6$. 定理证毕.

将这一定理用于前面讨论过的点群, 符合晶体制约的第一类点群只可能有 11 种:

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_6.$$

$$D_2, D_3, D_4, D_6.$$

$$T, O.$$

在第一类点群中再加入反演, 就可以采用数学的方法得

到第二类点群,满足晶体制约的第二类点群只有 21 种,它们是

$$\begin{aligned}
 &S_2, S_4, S_6, \\
 &C_{1h}, C_{2h}, C_{3h}, C_{4h}, C_{6h}, \\
 &C_{2v}, C_{3v}, C_{4v}, C_{6v}, \\
 &T_h, T_d, O_h, \\
 &D_{2h}, D_{3h}, D_{4h}, D_{6h}, \\
 &D_{2d}, D_{3d}.
 \end{aligned}$$

至此可知,符合晶体制约的点群只可能有 32 种,现列表如下

符 号	符 号 的 意 义	对 称 类 型	数 目
C_n	具有 n 次对称轴	C_1, C_2, C_3, C_4, C_6	5
i	反演	$i=S_2$	1
σ	反射	$\sigma=C_{1h}$	1
C_{nh}	除具有 n 次轴外,还具有与轴垂直的水平对称面; h 代表水平的意思	$C_{2h}, C_{3h}, C_{4h}, C_{6h}$	4
C_{nv}	除具有 n 次轴外,还具有通过该轴的垂直对称面; v 代表垂直的意思	$C_{2v}, C_{3v}, C_{4v}, C_{6v}$	4
D_n	具有 n 次轴及 n 个与之垂直的 2 次轴	D_2, D_3, D_4, D_6	4
D_{nh}	h 的意义同前	$D_{2h}, D_{3h}, D_{4h}, D_{6h}$	4
D_{nd}	d 表示在 D_n 中还有一个平分两个 2 次轴间夹角的对称面	D_{2d}, D_{3d}	2
S_n	具有 n 次旋转反射轴	S_4, S_6	2
T	具有四个 3 次轴和三个 2 次轴(四面体的对称性)	T	1
T_h	h 的意义同前	T_h	1
T_d	d 的意义同前	T_d	1
O	具有三个互相垂直的 4 次轴及六个 2 次轴,四个 3 次轴	O, O_h	2
共 计			32

以上讨论指出了 32 种点群分别对应于晶体中的 32 种宏观对称类型。在讨论过程中,把结点都看作是等价的,至于

晶格中可能存在的复杂情况并未加以考虑。实际上,晶体的对称性还要复杂一些,当对晶体进行微观考察时,可以看到结点处的原子图案尚可有不同的方向等,加之,进行微观考察时,晶体的尺度相对于微观的原子尺度来说,可以看作是无限延伸的。这样,原来被排除在晶体对称之外的平移,以及由平移、旋转和反演等合成的变换,又可能成为晶体的对称变换。显然,在对晶体作微观对称性讨论时,对称变换增加甚多,当然构成的对称性群也增多了。通过计算,可以知道共有 **230** 种。实际上,化学家总共发现的晶格结构大约 **100** 种左右,由统计知道其中重要的只有 **30** 个左右,特别重要的只有 **15、16** 种。

群论在解决晶体的分类时,显示了重要的作用,这是群论的一种应用。其实,群论在数学中的应用还可追溯得更早。在晶体点群出现前一百年左右,法国数学家拉格朗日已经注意到,代数方程的可解性与它的根的对称性是有联系的。后来,数学家阿贝尔、伽罗瓦对此作了深入的研究,取得了重大的成就,这一问题获得了完美的解决,实际上群论是自此开始的。

利用群论对晶体进行分类,是群论在物理、化学领域的应用;利用群论去解决一般 n 次代数方程的可解性,是群论在数学领域的应用。两者有一共同之处,就是被应用的地方,都显示了对称性。解决晶体分类用群论,是因为晶体的格子结构具有对称性,或者说显示了图形的对称性;代数方程可解性问题的研究利用群论,是因为方程的系数和根之间存在着对称的依赖关系,或者也可以说显示了式的对称性。为此,我们可以想象,凡事物,不管它是实在的还是观念的,只要它具有对称性,那么就可以应用群论对它作定量的研究。

群论对现代学科基本粒子的研究的应用也是如此。大家

知道，一般地要想求解相应的偏微分方程组是困难的，往往要利用粒子所显现的对称性。么正么模群的应用，导致一些重要成果。例如 1963 年美国科学家盖尔曼利用群论去研究基本粒子，曾正确预言新粒子 Ω^- 的存在，果然两年后在物理实验中发现了它。这个成果影响很大，以致群论成了研究高能物理时不可缺少的手段。

随着科学的发展，这种从代数中研究运算结构开始的观点在数学中也不断取得进展。二十世纪初，E. V. 亨丁顿为群等代数结构作了一般的公理化处理。到了三十年代，范德瓦尔登的《近世代数》问世，完成了代数领域系统公理化工作，他在序言中说：“‘抽象的’、‘形式化的’或‘公理化的’方向在代数领域中造成了新的增长，特别地在群论、域论、赋值论和超复数系等部门中引起了一系列新概念的形 成，建立了许多新的联系，并导致了一系列深远的结果。本书的目的就是要将读者引入整个这一概念世界。”到四十年代，法国布尔巴基学派开始写作《数学原本》，在综合研究各类数学发展的基础上，推广了代数的结构观念，提出了以结构统一整个现代纯粹数学的观点。他们把数学归结为三类基本结构：代数结构（其中群就是最基本的），顺序结构，拓扑结构。在这基础上，可以交叉，衍生出许多子结构，多重结构。

总之，一百多年来，群论从产生、发展到今天，已取得了重大的成果。在数学诸领域，群论具有深刻的影响，在自然科学和技术领域如：基本粒子、量子化学、现代生物学、通讯编码、工程力学等方面成了强有力的工具，以至在人文科学方面也有了重要的应用。目前，群论在数学理论和应用领域仍很活跃，可以说群论在生长发展中。